BEITRÄGE ZUR QUALITATIVEN ANALYSE DER KOMPARATIVEN STATIK

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Wirtschaftswissenschaft
(doctor rerum politicarum)
der Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes

BERND H.-J. KITTERER

Saarbrücken ~~1970~~ 1971

BEITRÄGE ZUR QUALITATIVEN ANALYSE DER KOMPARATIVEN STATIK

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Wirtschaftswissenschaft
(doctor rerum politicarum)
der Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes

BERND H.- J. KITTERER

Saarbrücken 1970

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der Disputation: 19. 2. 1971

Dekan: Prof. Dr. W. K. Geck

Berichterstatter: Prof. Dr. R. Richter

Prof. Dr. H. Schneeweiß

G l i e d e r u n g

1. Ausgangssystem und Aufgabenstellung 1

1.1 Das Ausgangssystem 1
1.2 Aufgabenstellung 5

2. Komparative Statik 8

2.1 Analyse der Kausalstruktur 8
2.2 Rekursive und interdependente Systeme 14
2.3 Multiplikatortheorie 23

3. Qualitative Analyse 31

3.1 Lösungsverfahren zur Ermittlung der Multiplikatoren 33
3.1.1 Die herkömmlichen Lösungsverfahren 33
3.1.2 Der Beitrag von Samuelson 36
3.1.3 Das Lancastersche Lösungsverfahren 38
3.1.3.1 Lösungsvektoren ohne Nullelemente 39
3.1.3.2 Lösungen mit Nullelementen 43
3.1.3.3 Degenerierte Systeme 45
3.1.3.4 Die Einbeziehung quantitativer Informationen 47
3.1.3.5 Die Anwendung des Verfahrens auf Determinanten 49
3.1.4 Kritischer Vergleich der Lösungsverfahren 50

3.2 Standardformen 66
3.2.1 Die Lancastersche Standardform 67
3.2.1.1 Das Theorem 68
3.2.1.2 Ein vereinfachtes Verfahren 71
3.2.1.3 Die Kausalordnung der Form 74
3.2.1.4 Zusätzliche Nullelemente 79
3.2.2 Die Gormansche Standardform - ein Gegenbeispiel 83

3.2.3 Die zerlegbare Standardform 85
3.2.3.1 Das Vorzeichenbild der zerlegbaren Standardform 86
3.2.3.2 Beispiele 87
3.2.3.3 Die Kausalordnung der zerlegbaren Form 89
3.2.4 Ketten und Zyklen 93
3.2.4.1 Definitionen 93
3.2.4.2 Determinanten und Kofaktoren 94
3.2.4.3 Die Ermittlung der Inversen 98
3.2.4.4 Das Vorzeichenbild des Lösungsvektors 102
3.2.4.5 Kritik und Vergleich mit anderen Formen 105
3.2.5 Die Kausalstruktur in der Sprache der Ketten und Zyklen 113
3.3 Einwände gegen die qualitative Analyse 120
Literaturverzeichnis 126

1. Ausgangssystem und Aufgabenstellung

1.1 Das Ausgangssystem

Sofern Aussagen über wirtschaftliche Zusammenhänge in eine geschlossene formale Theorie eingebracht werden sollen, um den Fallstricken und Unzulänglichkeiten der verbalen Darstellung zu entgehen, bedient man sich oft simultaner Gleichungssysteme[1]. Man faßt die Definitionen, Verhaltenshypothesen, technischen Relationen usw. in Gleichungen und prüft, ob und unter welchen Bedingungen das daraus entstehende Gleichungssystem eine Lösung aufweist und durch welche Charakteristika sich die möglicherweise vorhandene Lösung auszeichnet.

Die in solchen Systemen auftretenden Variablen kann man danach aufteilen, ob sie

a) dem System vorgegeben sind (exogene Variable) oder
b) durch das System selbst erklärt werden sollen (endogene Variable).

Nennen wir die n Unbekannten, die endogenen Variablen, die in unserem Modell vorhanden sein sollen, $x' = (x_1,\ldots,x_n)$ [2] und die m exogenen Variablen, die den für die speziellen Zwecke des Modells ausgewählten 'Datenkranz' darstellen, $\alpha' = (\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$, so sollen zwischen beiden Mengen n unabhängige funktionale Beziehungen bestehen, die wir zunächst in impliziter Form niederschreiben:

---

1) Zu den methodologischen Problemen der Theoriebildung in den Wirtschaftswissenschaften vgl. RICHTER (1965). "Die nicht formalisierte 'verbale' Arbeitsweise erlaubt uns nur ziemlich oberflächliche Schlüsse. Um tieferliegende Schlüsse durchführen zu können (nicht nur zu erahnen), kommt man ohne ein formalisiertes logisches System nicht aus." Ebenda, S. 247.

2) Schreiben wir einen Vektor als Zeilenvektor, so versehen wir ihn mit einem "'". Wenn wir den Vektor als Spaltenvektor schreiben, entfällt dieses Zeichen. Andere Anwendungsweisen des Zeichens "'" werden an den entsprechenden Stellen definiert.

$$
\begin{aligned}
f^1(x_1,\ldots,x_n;\alpha_1,\ldots,\alpha_m) &= 0\\
f^2(x_1,\ldots,x_n;\alpha_1,\ldots,\alpha_m) &= 0\\
&\ldots\\
f^n(x_1,\ldots,x_n;\alpha_1,\ldots,\alpha_m) &= 0 \quad \text{oder}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
f^i(x', \alpha') = 0 \quad , \; i = 1,\ldots,n \tag{1a}
$$

Wählen wir einen dynamischen Ansatz und benutzen dazu diskrete Zeitabschnitte, dann enthält der Vektor x_t die gemeinsam abhängigen Variablen der Periode t, zu deren Erklärung das System dienen soll, während der Vektor α_t die vorherbestimmten Variablen [1], d. h. die verzögerten endogenen Variablen, die verzögerten exogenen Variablen und die exogenen Variablen der Periode t enthält:

$$
f^i(x_t', \alpha_t') = 0 \qquad i = 1,\ldots,n. \tag{1b}
$$

Sind die auch als Strukturgleichungen bezeichneten Funktionen in (1) numerisch genau spezifiziert, dann liegt eine S t r u k t u r vor[2].
V o l l s t ä n d i g ist diese Struktur, wenn[3]

a) jede endogene Variable mindestens einmal ohne lag, d.h. als abhängige Variable vorkommt;

b) das System (1) so viele Gleichungen wie endogene (abhängige) Variablen enthält;

c) wir das System (1) so nach den abhängigen Variablen auflösen können, daß wir die abhängigen Variablen als eindeutige Funktion der vorherbestimmten Variablen erhalten.

---

1) Diese Einteilung der Variablen entspricht dem ökonometrischen Sprachgebrauch. Vgl. KOOPMANS/HOOD (1) (1953), S. 122 ff. und MENGES (1961), S. 36.

2) MENGES (1961), S. 57.

3) Ebenda, S. 6o.

Das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
x_1 &= g^1(\alpha_1,\ldots,\alpha_m) \\
x_2 &= g^2(\alpha_1,\ldots,\alpha_m) \\
&\vdots \\
x_n &= g^n(\alpha_1,\ldots,\alpha_m) \quad \text{oder}
\end{aligned} \tag{2}
$$

$$
x_i = g^i(\alpha^{o'}), \quad i = 1,\ldots,n \tag{2a}
$$

stellt dann die r e d u z i e r t e F o r m der Struktur (1a) dar.

In ökonometrischen Strukturen werden zusätzlich noch Störvariablen (u_t^i) und deren gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung eingeführt, mit deren Hilfe u.a. der Einfluß der in den Strukturgleichungen nicht berücksichtigten exogenen Variablen dargestellt wird, so daß das Gleichungssystem nun lautet[1)]

$$
f^i(x_t', \alpha_t') = u_t^i \quad i = 1,\ldots,n. \tag{1c}
$$

Ein M o d e l l ist eine Menge von Strukturen, die man z.B. dadurch erhalten kann, daß die Strukturgleichungen und die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung der Störvariablen numerisch nicht genau spezifiziert sind. Vollständig ist das Modell, wenn alle Strukturen des Modells vollständig sind[2)].

In den statischen Modellen der Wirtschaftstheorie fällt der Zeitindex t weg, der Vektor α enthält keine verzögerten Variablen, sondern nur exogene Variable und Lageparameter und es wird sozusagen

---

1) MENGES (1961), S. 37 und 61.

2) MENGES (1961), S. 68; KOOPMANS/HOOD (1) (1953), S. 117. In KOOPMANS/HOOD (1) (1953), S. 113 - 126 findet sich eine ausführliche Darstellung des Konzepts des vollständigen Modells.

nur der exakte Teil des ökonometrischen Modells betrachtet, d.h. Störvariablen werden nicht berücksichtigt[1].

Die komparative Statik befaßt sich mit der vergleichenden Analyse statischer Modelle. Die Vergleiche sind dabei zumeist folgender Art:[2]

a) Inter-Modell Vergleiche
   aa) Vergleiche der strukturellen Eigenschaften der Modelle (Unterschiede in der Kausalstruktur der Variablen und Gleichungen).
   ab) Vergleich der Lösungsmengen.

b) Intra-Modell Vergleiche
   ba) Vergleich der Lösungsmengen bei unterschiedlicher Wertzuweisung für die exogenen Variablen.
   bb) Vergleich der Lösungsmengen bei unterschiedlicher Wertzuweisung für die Parameter. Die exogenen Variablen ändern sich nicht.

---

1) "The static assumption is a simplification, which makes the problem more tractable, so that some progress can be made with it, as could hardly be made if the full complexities of a changing economy were faced at the start." HICKS (1965), S. 7.

   "Statik und Dynamik bezeichnen zwei verschiedene Arten der theoretischen Analyse wirtschaftlicher Phänomene. Man sagt, eine Analyse bestimmter wirtschaftlicher Entscheidungen bzw. Prozesse sei s t a t i s c h , wenn in diese Analyse nur solche Relationen zwischen den relevanten Variablen eingehen, in denen sich die Werte der Variablen auf den gleichen Zeitpunkt oder auf die gleiche Zeitperiode beziehen. Eine Theorie, die mit statischen Relationen arbeitet, wird entsprechend als s t a t i s c h e T h e o r i e bezeichnet." SCHNEIDER (1959), S. 23.
   MACHLUP (1959), S. 42, verweist bezüglich des Begriffspaares Statik-Dynamik auf die "dozens of conflicting views stated by economists in good standing" und zählt auch die entsprechenden Beispiele auf.

2) PAPANDREOU (1965), S. 74 ff.

1.2 Aufgabenstellung

Mit beiden Gruppen von Vergleichen werden wir uns in unserer Arbeit beschäftigen, allerdings in sehr allgemeiner Form.

a) Bei den Inter-Modell Vergleichen wird es vor allem darum gehen, festzustellen, in welcher Weise und nach welchen Kriterien sinnvolle Unterscheidungen zwischen Modelltypen getroffen werden können und welche Bedeutung diese Unterscheidungen für die in den Modellen behandelten ökonomischen Zusammenhänge haben.

   Im Mittelpunkt dieser Diskussion (vgl. Abschn.2.1 und 2.2) steht der Begriff der 'Kausalstruktur' und dies vor allem aus folgenden Gründen:

   1. Mit Hilfe dieses Begriffes (bzw. der Begriffe interdependent, rekursiv, blockrekursiv) lassen sich Aussagen über Strenge und Art des Zusammenhangs zwischen den im Modell vorhandenen endogenen Variablen machen. Formulieren wir diese Aussagen in der Sprache der ökonomischen Theorie, so sehen wir deutlicher vor allem den Bezug zur Diskussion makroökonomischer Modelle keynesscher Prägung. Sie lautet dann nämlich: Die Untersuchung der Kausalstruktur eine Modells zeigt uns, auf welchen Märkten die endogenen Variablen bestimmt werden und welcher Art der Zusammenhang zwischen diesen Märkten ist. Tauchen in einem Keynesschen Modell z.B. die endogenen Variablen w' (Reallohn), i (Zinssatz), p (Preisniveau) auf, so sind die Aussagen, daß
      a) w' auf dem Arbeitsmarkt, i auf dem Gütermarkt, p auf dem Geldmarkt bestimmt wird;
      b) w', i, p simultan auf allen drei Märkten bestimmt werden;
      c) w', p auf dem Gütermarkt, i auf dem Geldmarkt bestimmt wird;

d) w' auf dem Arbeitsmarkt, i auf dem Geldmarkt, p auf dem Gütermarkt bestimmt wird, nichts anderes als die Darstellung der jeweils unterschiedlichen Kausalstruktur der Variablen.

2. Die Untersuchung der Art des Zusammenhangs der aus dem Modell erklärbaren Variablen im Sinne einer Rangfolge oder Abhängigkeitsbeziehung ermöglicht die Klärung der Frage, in welchem Sinne der Begriff 'kausal' sinnvoll für die Erfassung wirtschaftlicher Zusammenhänge in Gleichungssystemen benutzt werden kann. Die Fragestellung kann auf die Wirkungsbeziehungen zwischen endogenen und exogenen Variablen ausgedehnt und auf diese Art und Weise die enge Verbindung zwischen Inter-Modell Vergleichen und Intra-Modell Vergleichen aufgezeigt werden.

b) Oft wird die zweite Gruppe von Vergleichen, vor allem der Vergleich der Lösungsmengen bei unterschiedlicher Wertzuweisung für die exogenen Variablen, als das eigentliche Betätigungsfeld der komparativen Statik betrachtet[1].

---

1) "It is hardly enough, however, to show that under certain conditions we can name enough relations (equations) to determine the values of our unknowns. It is important that our analysis be developed in such terms that we are aided in determining how our variables change qualitatively or quantitatively with changes in explicit data. ... The usefulness of our theory emerges from the fact that by our analysis we are often able to determine the nature of the changes in our unknown variables resulting from a designated change in one or more parameters. ... This in brief is the method of c o m p a r a t i v e s t a t i c s , meaning by this the investigation of changes in a system from one position of equilibrium to another without regard to the transitional process involved in the adjustment." SAMUELSON (1947), S. 7 f.

Die Multiplikatoren, d.h. die Veränderung der Gleichgewichtswerte der endogenen Variablen bei einer exogenen Störung des Gleichgewichts, ergeben sich als die partiellen Ableitungen der reduzierten Form [1]

$$x_i^o = g^i(\alpha^{o'}) \qquad i = 1,\ldots,n$$

$$\left(\frac{\delta x_i}{\delta \alpha_j}\right)^o = \frac{\delta g^i(\alpha^{o'})}{\delta \alpha_j}$$

$$i = 1,\ldots,n; \; j = 1,\ldots,m.$$

Hauptgegenstand unserer Untersuchungen wird allerdings nicht die Mulitiplikatortheorie schlechthin sein, sondern deren qualitative Analyse[2].

c) Natürlich gibt es Beziehungen zwischen beiden Gruppen von Vergleichen. So ist es z.B. durchaus üblich, Multiplikatoren von Systemen unterschiedlicher Kausalordnungen zu vergleichen. Wir wollen jedoch eine andere Verbindung zwischen beiden Gruppen von Vergleichen herstellen [3]. Wir untersuchen, welche Kausalstrukturen die qualitativen komparativ-statischen Systeme der Multiplikatortheorie aufweisen und werden u.a. zu dem Ergebnis kommen, daß eine Beschreibung der 'typischen Formen' vorzeichenlösbarer komparativ-statischer Systeme zugleich eine Beschreibung der Kausalstruktur dieser qualitativen Systeme darstellt.

---

1) PAPANDREOU (1965), S. 61 f. Zur Darstellung verschiedener Multiplikatorbegriffe, siehe Abschnitt 2.4.

2) Vgl. S. 31 f.

3) Eingehender wird dieser Zusammenhang auf S. 16 - 22 dargestellt.

2. Komparative Statik

2.1 Analyse der Kausalstruktur[1)]

Um einen Vergleich der strukturellen Eigenschaften der untersuchten Systeme vornehmen zu können, müssen wir das Konzept der Kausalstruktur erläutern, wozu wir lineare Strukturen verwenden.
Von einer l i n e a r e n S t r u k t u r sprechen wir dann, wenn die im System (1) auftretenden Gleichungen linear sind.
Dann erhalten wir für das Gleichungssystem (1):

$$(1a') \qquad Ax + B\alpha = 0$$

$$A = [a_{ij}]_1^n$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \cdots b_{1m} \\ \vdots \quad \vdots \\ b_{n1} \cdots b_{nm} \end{bmatrix}$$

A und B sind Koffizientenmatrizen, x ist der Vektor der n endogenen (abhängigen), α der Vektor der m exogenen (vorherbestimmten) Variablen.
Gemäß der Definition auf S. 2 ist die lineare Struktur (1a') vollständig, wenn die Zahl der Gleichungen der Zahl der endogenen Variablen entspricht und (1a') eine eindeutige Lösung besitzt. Der Rang der Koffizientenmatrix A ist dann gleich der Anzahl der vorhandenen Gleichungen.
Wir bezeichnen die Menge aller Gleichungen einer vollständigen Struktur als v o l l s t ä n d i g e M e n g e [2)] und die Untermenge von Gleichungen, in der die Zahl der Gleichungen der Zahl der endogenen

---

1) SIMON (1953), hier S. 13-26; PAPANDREOU (1965), S. 38 - 52.

2) Dieser und die übrigen in diesem Abschnitt erläuterten Begriffe sind unter vereinfachenden Annahmen auch auf nichtlineare Modelle anwendbar. Vgl. PAPANDREOU (1965), S. 51 f.

Variablen entspricht, die in diesen Gleichungen vorhanden sind, als v o l l s t ä n d i g e U n t e r m e n g e .
Die k l e i n s t e v o l l s t ä n d i g e U n t e r m e n g e der linearen Struktur enthält selbst keine vollständige (echte) Untermenge. Sie wird auch v o l l s t ä n d i g e U n t e r m e n g e n u l l t e r O r d n u n g genannt. Besteht das System linearer nichthomogener Gleichungen Ax = b nur aus einer einzigen vollständigen Menge, die keine vollständigen (echten) Untermengen enthält, dann haben wir es mit einer i n t e g r i e r t e n Struktur zu tun. Die Koeffizientenmatrix

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

charakterisiert z.B. eine integrierte Struktur.
Eine n i c h t i n t e g r i e r t e l i n e a r e S t r u k t u r liegt dann vor, wenn das System nur vollständige (echte) Untermengen enthält. So kennzeichnet z.B. die folgende Koeffizientenmatrix eine nichtintegrierte Struktur:

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Wie an dem Beispiel zu erkennen ist, bestehen nichtintegrierte Strukturen aus selbständigen Systemen, die zu einer Struktur zusammengefaßt sind. In unserem Beispiel bestehen die beiden Systeme aus

$$a_{11}x_1 = b_1 \quad \text{und}$$
$$a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2$$
$$a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3$$
$$a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4$$

Den Begriff der K a u s a l o r d n u n g wollen wir an dem folgenden Beispiel $A_3x = b$ erläutern, wobei A_3 die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems ist und $x' = (x_1,\ldots,x_8)$:

$$\begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\\(4)\\(5)\\(6)\\(7)\\(8)\end{array}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} & a_{45} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} & a_{67} & a_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{76} & a_{77} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{85} & a_{86} & 0 & a_{88} \end{bmatrix}$$

Zwar bilden die ersten drei Gleichungen des Systems $A_3x = b$ eine vollständige Untermenge nullter Ordnung, aber die restlichen sechs Gleichungen bilden ihrerseits keine vollständige Untermenge nullter Ordnung, so daß es falsch wäre, das Gesamtsystem als nichtintegriert zu bezeichnen.

Die Variablen x_1, x_2, x_3 können ohne weiteres aus den Gleichungen (1) bis (3) errechnet werden. Setzt man dann x_2 in die vierte Gleichung ein, so kann man die Variablen x_4 und x_5 aus den Gleichungen (4) und (5) errechnen. Da die Gleichungen (4) und (5) nach dem ersten Substitutionsvorgang ein System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten bilden, bezeichnet man sie als v o l l s t ä n d i g e U n t e r m e n g e e r s t e r O r d n u n g.

B sei eine vollständige Untermenge k-ter Ordnung. Wenn die Variable x_i in den Gleichungen der vollständigen Untermenge B auftaucht, aber in keiner vollständigen Untermenge niedrigerer Ordnung erscheint, bezeichnet man sie als e n d o g e n i n d e r U n t e r m e n g e B.
Wenn x_i aber außerdem noch in einer Gleichung einer vollständigen Untermenge niedrigerer Ordnung erscheint, bezeichnet man x_i als e x o g e n i n d e r U n t e r m e n g e B.
Schon jetzt können wir feststellen, daß die Variablen x_1, x_2, x_3 endogen sind in der Untermenge nullter Ordnung, die durch die Matrix

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

dargestellt wird. Die Variable x_2 ist jedoch exogen in der Untermenge erster Ordnung, die durch Gleichungen (4) und (5) repräsentiert wird. Denn x_2 erscheint nicht nur in dieser Untermenge erster Ordnung, sondern auch in der vollständigen Untermenge nullter Ordnung.

Auf diese Art und Weise können wir die Rangordnung der Variablen weiter verfolgen. Nach dem ersten Substitutionsvorgang sind wir imstande, die Variablen x_4 und x_5 zu errechnen. Wenn wir dann in einem zweiten Substitutionsvorgang x_5 in Gleichung (8) einsetzen, erhalten wir ein weiteres System von drei Gleichungen ((6),(7),(8)) mit drei Unbekannten (x_6, x_7, x_8), weshalb wir die Gleichungen (6) bis (8) als v o l l s t ä n d i g e U n t e r m e n g e z w e i t e r O r d n u n g bezeichnen. Entsprechend dem obigen Sprachgebrauch ist die Variable x_5 endogen in der Untermenge erster Ordnung und exogen in der Untermenge zweiter Ordnung.

Wir können jetzt folgende Einteilung der Variablen treffen:

Ordnung	Gleichungen	endogen	exogen
0	(1),(2),(3)	x_1, x_2, x_3	-
1	(4),(5)	x_4, x_5	x_2
2	(6),(7),(8)	x_6, x_7, x_8	x_5

Ein Kausalzusammenhang besteht zwischen den endogenen Variablen im Sinne folgender

Definition: [1] β bezeichne die Menge der Variablen, die in einer vollständigen Untermenge B endogen sind. γ bezeichne die Variablen, die in einer vollständigen Untermenge C endogen sind. Die Variablen γ sind d i r e k t k a u s a l a b h ä n g i g von den Variablen β ($\beta \rightarrow \gamma$), wenn mindestens ein Element von β als eine exogene Variable in C erscheint. [2]

In unserem oben behandelten Beispiel sind nach dieser Definition die Variablen (x_6, x_7, x_8) direkt kausal abhängig von den Variablen (x_4, x_5). Die Variablen (x_4, x_5) sind direkt kausal abhängig von den Variablen (x_1, x_2, x_3).

Diese Art der Abhängigkeitsbeziehungen ist nicht umkehrbar, sondern weist eine eindeutige Richtung auf. Die endogenen Variablen der vollständigen Untermenge k-ter Ordnung sind abhängig von den endogenen Variablen niedrigerer Ordnung. Aber die endogenen Variablen der vollständigen Untermenge niedrigerer Ordnung sind nicht abhängig von der vollständigen Untermenge k-ter Ordnung.

---

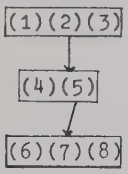
1) SIMON (1953), S. 18.

2) Es genügt, daß ein Element von β als exogene Variable in C erscheint, weil die endogenen Variablen der vollständigen Untermenge B simultan bestimmt werden.

Auf unser Beispiel angewendet, heißt das:
Die Variablen x_4, x_5 sind zwar abhängig von den Variablen x_1, x_2, x_3, aber diese sind unabhängig von den Variablen x_4, x_5 und den Variablen x_6, x_7, x_8.

Die Variablen x_6, x_7, x_8 sind zwar abhängig von den Variablen x_4, x_5, aber die Variablen x_4, x_5 sind unabhängig von den Variablen x_6, x_7, x_8.

Grafisch läßt sich die Kausalordnung des gewählten Beispiels folgendermaßen darstellen:



Gl. 1,2,3

Gl. 4,5

Gl. 6,7,8

Die umrandeten Ziffern geben die Nummern der Variablen an, die in der betreffenden Untermenge bestimmt werden. Jedes Kästchen stellt eine vollständige Untermenge dar, wobei der Platz in der Grafik ihrer Ordnung entspricht. Die Pfeile gehen von den exogenen Variablen in einer Untermenge aus und enden bei den endogenen Variablen, zu deren Bestimmung sie notwendig sind.

Wenn in einer vollständigen Struktur die Zahl der Variablen größer ist als die Zahl der Gleichungen, liegt eine a u f t e i l b a r e lineare Struktur vor.

Beträgt die Zahl der Variablen p, die Zahl der Gleichungen n, so können p-n Variablen beliebige Werte zugewiesen werden. Diese Variablen sind exogen zur Struktur oder einfach e x o g e n , während die anderen n Variablen endogen zur Struktur sind oder einfach e n d o g e n . Die Kausalstruktur

eines solchen Systems wird erkennbar, wenn die zugehörige Koeffizientenmatrix nach den endogenen und exogenen Variablen aufgeteilt wird. [1]

2.2 Rekursive und interdependente Systeme

Für ein Modell, das z.B. drei vollständige Untermengen verschiedener Ordnung aufweist, kann die Matrix A in der folgenden Form aufgeschrieben werden:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \qquad x = (x^1, x^2, x^3)$$

Die Diagonalmatrizen sind quadratisch und in jeder Zeile enthält mindestens eine Matrix A_{ij} $(i < j)$ Elemente, die ungleich Null sind [2]. In unserem Beispiel (S.1o) gehören zu A folgende Untermatrizen:[3]

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{88} & 0 & a_{86} \\ 0 & a_{77} & a_{76} \\ a_{68} & a_{67} & a_{66} \end{bmatrix} \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{85} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} a_{55} & a_{54} \\ a_{45} & a_{44} \end{bmatrix} \qquad A_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 \end{bmatrix}$$

---

1) KUHN (1968), S. 31 - 47, benutzt den Begriff der Kausalstruktur auch bei der Erklärung einzelner Gleichungstypen, gerät aber dann in Widersprüche bei der Anwendung des Begriffes auf vollständige Gleichungssysteme. Vgl. auch die Kontroverse zwischen KUHN (1970) und BÖVENTER (1969), (1970).

2) Sonst hätten wir es mit einem nichtintegrierten System zu tun. Sind in einer Spalte alle Matrizen $A_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, dann gibt es mehrere vollständige Untermengen der gleichen Ordnung.

3) Um die Matrix in die entsprechende Form zu bringen, wird sie transponiert und an der Nebendiagonalen gespiegelt.

$$A_{33} = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x^{1'} &= (x_8, x_7, x_6) \\ x^{2'} &= (x_5, x_4) \\ x^{3'} &= (x_3, x_2, x_1) \end{aligned}$$

Die Matrix A ist also blockdreieckig. Im Extremfall enthält jede Matrix A_{ii} nur ein einziges Element. Dann ist die Matrix A dreieckig, d.h. jede vollständige Untermenge enthält nur eine einzige Gleichung. Umgekehrt kann die Koeffizientenmatrix jedes linearen Modells, in dem jede vollständige Untermenge nur eine einzige Gleichung enthält, in die dreieckige Form gebracht werden.

Das Konzept der Kausalstruktur ist bisher nicht nur in der Wirtschaftstheorie, sondern auch in der Theorie der ökonometrischen Modellbildung diskutiert worden. Ausgangspunkt ist das lineare ökonometrische Modell[1)]

$$(1c') \qquad Ax + B\alpha = u,$$

A und B sind wie in (1a') (S. 8) definiert. x ist der Vektor der endogenen (abhängigen) Variablen, α der Vektor der vorherbestimmten Variablen, u der Vektor der stochastischen Variablen mit dem Erwartungswert Null, einer diagonalen Kovarianzmatrix und stochastischer Unabhängigkeit von α. A sei dreieckig, wobei $a_{ii} = 1$ $(i = 1,\ldots,n)$. Ein durch solche Eigenschaften gekennzeichnetes Modell wird als r e k u r s i v e s Modell bezeichnet[2)]. Rekursive Modelle haben den Vorteil, daß man nicht die reduzierte Form schätzen muß, sondern die Koeffizienten direkt schätzen kann, indem man die Kleinst-Quadrat

---

1) Wir lassen den Index t, den wir in Gleichung (1c) notiert hatten, der Einfachheit halber weg.

2) STROTZ/WOLD (1960), S. 420; STROTZ (1960), S. 429 f. Strotz würde das Modell auch als rekursiv bezeichnen, wenn die Kovarianzmatrix der Störvariablen nicht diagonal wäre. Vgl. STROTZ (1960), S. 430, Fn. 6.

Regression auf jede Gleichung getrennt anwendet [1], während die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf interdependente Modelle verzerrte Parameterschätzungen liefert.

Alle nicht rekursiven Modelle sind i n t e r - d e p e n d e n t [2]. In diesem Fall ist die Matrix A in (1c') nicht dreieckig. Dennoch kann eine Kausalordnung der Variablen vorhanden sein, so daß die Matrix A in eine blockdreieckige Form gebracht werden kann. Dann sprechen wir von einem b l o c k - r e k u r s i v e n Modell [3].

In den exakten statischen Modellen der Wirtschaftstheorie charakterisieren die Begriffe rekursiv, blockrekursiv und interdependent nur die Form der Matrix A in der Gleichung

$$(1a') \quad Ax + B\alpha = 0.$$

Bisher wurde das Wort 'kausal' bei der Erklärung des Aufbaus von Strukturen nur in einem ganz bestimmten Sinne benutzt, nämlich nur im Sinne eines Abhängigkeitsschemas, in das die verschiedenen (echten) Untermengen des zu untersuchenden Systems gebracht werden können und nicht etwa im Sinne eines Verursachungsschemas, mit dessen Hilfe erklärt werden könnte, welche Variable eine Ursache und welche die Folge dieser Ursache darstellt.

---

1) WALTERS (1968), S. 197. Fisher kommt allerdings zu dem Ergebnis, daß die Annahmen des rekursiven Modells bei makroökonometrischen Modellen gewöhnlich nicht erfüllt sind. Vgl. FISHER (1965), S. 595 - 597.
Von den 25 makroökonometrischen Modellen, deren Eigenschaften Nerlove tabellarisch erfaßt, sind nur zwei rekursiv. Vgl. NERLOVE (1966), Table 6, section (7), S. 137 und Table 8, section (7), S. 141.

2) Mit der Frage, ob es in der reinen ökonomischen Theorie Argumente für oder gegen einen der beiden Typen von Modellen gibt, beschäftigen sich BENTZEL/HANSEN(1954/55).

3) Vgl. GRUBER (1968), S. 121 ff. und FISHER (1961), S. 42 f.

Es bedarf jedoch nur einer geringfügigen Ausweitung der auf S.12 gegebenen Definition, um nicht bloß von Abhängigkeitsbeziehungen unter den endogenen Variablen, sondern eben sinnvoll von 'kausaler' Abhängigkeit sprechen zu können. Nehmen wir z.B. an, das Modell (1a') sei rekursiv. Die endogenen Variablen des Modells bilden dann eine K a u s a l k e t t e [1] in folgendem Sinne[2]:

x_n ist Ursache von x_{n-1}, wenn es möglich ist (oder grundsätzlich möglich wäre), durch Kontrolle von x_n auch x_{n-1} zu kontrollieren, ohne daß es möglich ist (oder grundsätzlich möglich wäre), durch die Kontrolle über x_{n-1} auch x_n zu kontrollieren. In diesem Sinn ist also x_n Ursache für x_{n-1}, x_{n-1} Ursache für x_{n-2} usw.

Im Falle eines blockrekursiven Modells reduziert sich der Zusammenhang zwischen den endogenen Variablen auf die V e k t o r k a u s a l i t ä t [3].

Im obigen Beispiel (S.14) ist der Vektor x^3 Ursache für den Vektor x^2. x^3 und x^2 sind Ursache für den Vektor x^1. [4]

Ist ein Modell rekursiv, so bedeutet dies in der Sprache der Kausalanalyse, daß das Modell soviele verschiedene vollständige Untermengen enthält wie endogene Variable bzw. Gleichungen vorhanden sind, daß also jede endogene Variable in einer Gleichung bestimmt wird. Ökonomisch bedeutet dies, daß bei rekursiven Modellen jede endogene Variable auf einem Markt bestimmt wird.

---

1) Der Begriff 'causal chain' stammt von Wold. Vgl. z.B. WOLD/JUREEN (1953), S. 50. Zur Diskussion des Kausalitätsbegriffes vgl. STROTZ/WOLD (1960), (1963), BASMANN (1) und (2) (1963), STROTZ (1960), WOLD (1960).

2) STROTZ/WOLD (1960), S. 418, 420 f.

3) Ebenda, S. 421 f.

4) Auch hier liegt eine Art Kausalkette vor, wofür wir den Begriff 'Quasi-Kausalkette' verwenden.

Ist ein Modell blockrekursiv, so werden mindestens zwei endogene Variable simultan in einer vollständigen Untermenge bestimmt, d.h. zwei endogene Variable werden simultan auf zwei Märkten bestimmt. Wir wählen als Beispiel folgendes einfache Modell vom Keynesschen Typ: [1]

$$I(i,X(N(w'))) + C(i,X(N(w'))) - X(N(w')) = 0$$

$$L(i,X(N(w'))) - M^a/p = 0$$

$$N(w') - A(w') = 0$$

Die Symbole haben folgende Bedeutung:

C	=	Konsum	} real
I	=	Investition	
X	=	Output	
L	=	Geldnachfrage	
M^a	=	Geldangebot	
N	=	Arbeitsnachfrage	
A	=	Arbeitsangebot	
w'	=	Reallohn (w/p)	
w	=	Geldlohn	
p	=	Preisniveau	
i	=	Zins	

Die erste Gleichung stellt die Gütermarktgleichung dar, die zweite die Geldmarktgleichung und die dritte die Arbeitsmarktgleichung. Das Geldangebot M^a ist exogen vorgegeben. Die Variablen w', i und p sind endogen. Die dritte Gleichung bildet eine vollständige Untermenge nullter Ordnung. Auf dem Arbeitsmarkt wird also der Reallohn bestimmt. Die erste Gleichung bildet eine vollständige Untermenge erster Ordnung, in der der Zins bestimmt wird, d.h. durch Einsetzen von w' in die erste Gleichung können wir daraus i ermitteln. Der Zinssatz wird also auf

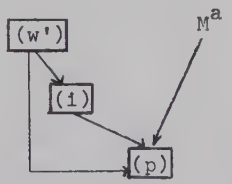
---

1) Das Modell entspricht im wesentlichen dem von Basset, das wir auf S. 51 ff. untersuchen.

dem Gütermarkt bestimmt. Die zweite Gleichung stellt eine vollständige Untermenge zweiter Ordnung dar, in der das Preisniveau bestimmt wird, d.h. durch Einsetzen von w' und i in die zweite Gleichung können wir p bestimmen. Der Preis wird also auf dem Geldmarkt bestimmt[1]. Ist das Modell linear, so haben wir es mit einem rekursiven Modell zu tun.
Würden wir annehmen, daß der Output X auch vom Preisniveau abhängig ist, so daß die Gütermarktgleichung lautet:

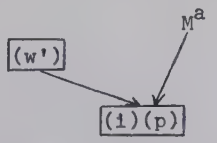
$$I(i,X(p,N(w'))) + C(i,X(p,X(p,N(w'))) - X(p,N(w')))=0,$$

dann würden die erste und zweite Gleichung des Modells eine vollständige Untermenge erster Ordnung bilden. Preisniveau und Zinssatz würden dann simultan auf dem Geld- und Gütermarkt bestimmt werden. Wir hätten es dann mit einem blockrekursiven Modell zu tun.
Im ersten Fall (rekursives Modell) sieht die grafische Darstellung der Kausalordnung folgendermaßen aus: [2]



Gl. 3
Gl. 1
Gl. 2

Die Kausalbeziehungen lauten also: Der Reallohn w' ist Ursache für den Zinssatz i. w' und i sind Ursache für das Preisniveau p.
Im zweiten Fall (blockrekursives Modell) ergibt sich folgendes Bild der Kausalordnung:



Gl. 3
Gl. 1,2

1) Diese Aussagen gelten nur für das Modell in dieser Schreibweise. Zu anderen Schreibweisen vgl. RICHTER (1970), 3. Kap.

2) Exogene Variable werden bei der grafischen Darstellung der Kausalordnung nicht umrandet.

Die Kausalbeziehungen lauten dann: Der Reallohn w' ist Ursache für das Preisniveau p und den Zinssatz i.

Allerdings ist die Erklärung der Kausalordnung sowohl im allgemeinen Fall (1a') als auch in dem eben dargestellten Beispiel insofern unvollständig als der Zusammenhang zwischen endogenen und exogenen Variablen nicht in die Betrachtung einbezogen ist[1]. Denn die soeben als Kausalordnung dargestellten Abhängigkeitsbeziehungen werden bei der Untersuchung statischer Modelle zumeist benutzt zur Analyse zweier Fragekreise:

a) Wie ändern sich die endogenen Variablen bei einer Änderung der exogenen Variablen und Lageparameter?[2]

b) In welchem Umfang muß welche Instrumentvariable geändert werden, um die gewünschten Werte der Zielvariablen des Modells zu erreichen?[3]

b) ist eigentlich nur ein Anwendungsfall von a). Beide unterscheiden sich nur insofern als - formal betrachtet - die endogenen Variablen in a) (z.B. das Preisniveau) zu exogenen Variablen, d.h. Zielvariablen unter Frage b) werden, während umgekehrt die exogenen Variablen in a) (z.B. die Geldmenge M^a) zu den endogenen Variablen, d.h. Instrumentvariablen unter Frage b) werden. Beiden Fragen ist gemeinsam,

---

1) Samuelson formuliert etwas überspitzt folgendermaßen: "Within the framework of any system the relationships between our variables are strictly those of mutual interdependence. It is sterile and misleading to speak of one variable as causing or determining another. Once the conditions of equilibrium are imposed, all variables are simultaneously determined. ... The only sense in which the use of the term causation is admissible is in respect to changes in external data or parameters. As a figure of speech, it may be said that changes in these cause changes in the variables of our system." SAMUELSON (1947), S. 9 f.

2) Vgl. hierzu Kap. 2.3.

3) HANSEN (1958), S. 22 - 25, hat die Kausalordnung linearer Modelle unter diesem Gesichtspunkt untersucht.

daß sie komparativ-statischer Natur sind und somit eine Untersuchung der Multiplikatorwirkungen exogener Variablen eng verknüpft ist mit der Untersuchung der Kausalordnung der endogenen Variablen.
Nehmen wir an, das System (1a') $Ax + B\alpha = 0$ sei blockrekursiv und enthalte die auf S.14 angegebenen Untermatrizen. Nehmen wir weiter an, es seien nur zwei exogene Variable α_1 und α_2 vorhanden. Sind die Elemente b_{ij} $(i = 1,\ldots,8;\ j = 1,2)$ der Matrix B alle ungleich Null, so erweitern sich die Kausalitätsbeziehungen folgendermaßen:
Der Vektor α ist Ursache für den Vektor x^3, α und x^3 sind Ursachen für den Vektor x^2, α, x^3 und x^2 sind Ursache für den Vektor x^1. Formulieren wir diesen Zusammenhang klarer im komparativ-statischen Sinne:
Eine Veränderung der exogenen Parameter bewirkt eine direkte Veränderung aller endogenen Variablen, weil die exogenen Variablen in allen Gleichungen auftauchen. Außerdem verändern sich aber die endogenen Variablen x^2, weil sie kausal abhängig sind von x^3 und die Veränderung der Variablen x^1 wird außer durch eine Veränderung von α auch durch eine Veränderung der Variablen x^3 und x^2 verursacht. Solche Abhängigkeitsbeziehungen sind in statischen Modellen jedoch äußerst selten anzutreffen. Sehr viel häufiger sind Zusammenhänge folgender Art:
Alle Elemente von B seien Null, außer $b_{11} \neq 0$ und $b_{62} \neq 0$. Eine Veränderung von α_1 bewirkt nun eine Veränderung von x^3, die Veränderung von x^3 bewirkt eine Veränderung von x^2, Veränderungen von x^3 und x^2 bewirken Veränderungen von x^1. Eine Veränderung von α_2 jedoch bewirkt nur eine Veränderung von x^1, sie kann keine Veränderung der endogenen Variablen in vollständigen Untermengen niedrigerer Ordnung bewirken.

Wenn α_1 und α_2 als Instrumentvariable aufgefaßt werden, gilt: Die Veränderung von α_2 zur Erreichung eines Zielwertes in x^1 ist abhängig von der Veränderung von α_1 zur Erreichung eines Zielwertes in x^3. Wie die Kausalbeziehungen zwischen endogenen Variablen, so ist die Beziehung zwischen den Instrumentvariablen ebenfalls nicht umkehrbar.
In dem auf S. 18 dargestellten Keynesschen Modell ist die endogene Variable p von der exogenen Variablen M^a kausal abhängig, d.h. eine Veränderung von M^a führt zu einer Veränderung des Preisniveaus, aber auf den Reallohn und den Zinssatz hat die Geldmenge keinen Einfluß, weil der Reallohn auf dem Arbeitsmarkt und der Zinssatz auf dem Gütermarkt bestimmt wird. Beide Märkte sind kausal unabhängig von dem Geldmarkt, auf dem p bestimmt wird.

Die Anwendung des Begriffes 'kausal' ist in den statischen Gleichgewichtssystemen der Wirtschaftstheorie also auf die Beschreibung der Art des Zusammenhangs zwischen den endogenen Variablen (bzw. zwischen den einzelnen Märkten) und die Wirkungsbeziehungen zwischen endogenen und exogenen Variablen zu beschränken.
Der in diesem Sinne benutzte Begriff der Kausalordnung eines Systems kann natürlich nicht mit dem 'klassischen Prinzip der Kausalität' übereinstimmen, das Basmann wie folgt definiert:[1)]

> "Assume that mechanism under investigation can be isolated from all systematic, i.e., nonrandom external influences; assume that the mechanism can be started over repeatedly from any definite initial condition. If, every time the mechanism is started up from approximately the same initial condition, it tends to run throug approximately the same sequence of events, then the mechanism is said to be causal."

Denn dieses Prinzip ist nur auf dynamische Systeme anwendbar und nicht auf statische, in denen die

---

1) BASMANN (1963), S. 442. Vgl. auch die dort angegebene philosophische Literatur und SAMUELSON (1947), S. 317 f.

Zeit keine Rolle spielt und wegen der Gleichgewichtsbedingungen größere Interdependenzen als in dynamischen Systemen vorherrschen[1].

2.3 Multiplikatortheorie

Der zweite große Teilbereich der komparativen Statik beschäftigt sich mit dem Vergleich der Lösungsmengen des Systems (1) bei unterschiedlicher Wertzuweisung für die exogenen Variablen und Parameter. Diese Art der Analyse soll Aufschluß darüber geben, wie (in welcher Richtung) sich die Gleichgewichtswerte der endogenen ökonomischen Variablen ändern, wenn sich eine oder mehrere exogene Variable oder Parameter ändern.
Haben im ursprünglichen Gleichgewicht die exogenen Variablen und Parameter die Werte $\alpha^{o\prime} = (\alpha_1^o,\ldots,\alpha_m^o)$ und die endogenen Variablen die Werte $x^{o\prime} = (x_1^o,\ldots,x_n^o)$, wobei

$$(3)\quad f^i(x^{o\prime},\alpha^{o\prime}) = 0 \qquad i = 1,\ldots,n$$

und

$$(4)\quad x_i^o = g^i(\alpha^{o\prime}),$$

so erhalten wir durch totales Differenzieren jeder Gleichung in (3):

$$(5)\quad df^i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, dx_j + \sum_{q=1}^{m} f_{iq}\, d\alpha_q = 0, \quad i = 1,\ldots,n$$

$$\text{wobei}\quad a_{ij} = \frac{\delta f^i(x_1^o,\ldots,x_n^o;\ \alpha_1^o,\ldots,\alpha_m^o)}{\delta x_j}$$

$$\text{und}\quad f_{iq} = \frac{\delta f^i(x_1^o,\ldots,x_n^o;\ \alpha_1^o,\ldots,\alpha_m^o)}{\delta \alpha_q}$$

---

1) Vgl. BENTZEL/HANSEN (1954/55), S. 160 f.

In (5) ist $df^i = 0$, weil vor und nach Änderung des Vektors α alle Gleichungen f^i $(i = 1,\ldots,n)$ erfüllt sein sollen, d.h. das System sich in einem neuen Gleichgewicht befinden soll. In Matrixschreibweise:

$$(6)\quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \sum f_{1q}\, d\alpha_q \\ \sum f_{2q}\, d\alpha_q \\ \vdots \\ \sum f_{nq}\, d\alpha_q \end{bmatrix}$$

Zur Vereinfachung können wir auch schreiben:

$$(7)\quad Adx = Fd\alpha, \text{ wobei}$$

$$A = [a_{ij}]_1^n$$

$$F = \begin{bmatrix} -f_{11} & \cdots & -f_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ -f_{n1} & \cdots & -f_{nm} \end{bmatrix}$$

$$(dx)' = (dx_1,\ldots,dx_n)$$

$$(d\alpha)' = (d\alpha_1,\ldots,d\alpha_m)$$

Die partiellen Ableitungen einer endogenen Variablen nach einer exogenen Variablen stellen die Multiplikatoren des Systems (4) dar:

$$\left(\frac{\delta x_i}{\delta \alpha_j}\right)^o = \frac{\delta g^i\,(\alpha^{o\prime})}{\delta \alpha_j} \qquad \begin{matrix} i = 1,\ldots,n \\ j = 1,\ldots,m \end{matrix}$$

Aus (7) erhalten wir

$$dx = A^{-1}Fd\alpha.^{1)}$$

Die Elemente der Matrix $D = A^{-1}F$ sind ebenfalls nichts anderes als die Multiplikatoren des gesamten Systems, so daß wir auch schreiben können:

---

1) Wenn A regulär ist.

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\delta x_1}{\delta \alpha_1} & \cdots & \frac{\delta x_1}{\delta \alpha_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\delta x_n}{\delta \alpha_1} & \cdots & \frac{\delta x_n}{\delta \alpha_m} \end{bmatrix}$$

Beschränken wir uns auf die Betrachtung einer einzigen exogenen Variablen, so können wir das System (7) folgendermaßen schreiben:

$$(8) \qquad Ay = b$$

$$y' = (\delta x_1/\delta\alpha, \ldots, \delta x_n/\delta\alpha)$$

$$b' = (-f^1_\alpha, \ldots, -f^n_\alpha)$$

(8) ist ein System linearer Gleichungen mit konstanten Koeffizienten und den n Unbekannten $(\delta x_1/\delta\alpha, \ldots, \delta x_n/\delta\alpha)$.

Sind die Zahlenwerte aller a_{ij} bekannt, so sind auch die numerischen Werte der Multiplikatoren errechenbar:

$$(9) \qquad y = A^{-1}b. \quad 1)$$

Nach der Cramerschen Regel erhalten wir:

$$(10) \qquad \frac{\delta x_i}{\delta \alpha} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & -f^1_\alpha & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & \cdots & -f^2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & -f^n_\alpha & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{(i)}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

1) Wenn A regulär ist.

In dem linearen Modell

$$(1a') \qquad Ax + B\alpha = 0,$$

in dem A die Koeffizientenmatrix der endogenen Variablen x und B die Koeffizientenmatrix der exogenen Variablen α darstellt, lautet die reduzierte Form

$$x = -A^{-1}B\alpha.$$

Die Matrix $M = -A^{-1}B$ stellt die Multiplikatormatrix dar, d.h. für das Element m_{ij} der Matrix M gilt

$$m_{ij} = \delta x_i / \delta \alpha_j \qquad \begin{matrix} i = 1,\ldots,n \\ j = 1,\ldots,m \end{matrix}$$

Im einfachsten Keynesschen System

$$C + I - Y = 0$$
$$a + bY - C = 0$$

(Y = Volkseinkommen, a,b = Parameter der Konsumfunktion)
entsprechen die Matrizen

$$\begin{bmatrix} -1 & +1 \\ b & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1/(1-b) & 1/(1-b) \\ 1/(1-b) & b/(1-b) \end{bmatrix}$$

den Matrizen A,B,M und x = (Y,C), α = (a,I), so daß die reduzierte Form lautet:

$$Y = \frac{1}{1-b}a + \frac{1}{1-b}I$$

$$C = \frac{1}{1-b}a + \frac{b}{1-b}I$$

In einem linearen dynamischen Modell, in dem die verzögerten endogenen Variablen einen time lag von einer Periode aufweisen,[1)]

$$(1b') \qquad Ax_t + Bx_{t-1} + C\alpha_t = 0$$

---

1) Diese Annahme vereinfacht die folgende Darstellung, ohne ihr Ziel zu beeinträchtigen. Wir lehnen uns im folgenden eng an WALLIS (1969), S. 789 f. und THEIL/BOOT (1962), S. 137 - 143 an.

(A = nxn Koeffizientenmatrix der n endogenen Variablen x_t, B = nxn Koeffizientenmatrix der n verzögerten endogenen Variablen x_{t-1}, C = nxm Koeffizientenmatrix der m exogenen Variablen α_t) lautet die reduzierte Form

$$x_t = Dx_{t-1} + E\alpha_t, \tag{11}$$

wobei $D = -A^{-1}B$ und $E = -A^{-1}C$.

Die Elemente e_{ij} der Matrix E stellen wiederum Multiplikatoren dar:

$$e_{ij} = \frac{\delta x_{it}}{\delta \alpha_{jt}} \qquad \begin{matrix} i = 1,\ldots,n \\ j = 1,\ldots,m \end{matrix}$$

Sie werden auch 'impact multipliers' [1] genannt.

Setzen wir $x_{t-1} = Dx_{t-2} + E\alpha_{t-1}$ in die obige Gleichung (11) ein, so erhalten wir

$$x_t = D^2x_{t-2} + E\alpha_t + DE\alpha_{t-1}.$$

Durch weitere Substitution ergibt sich

$$x_t = D^{r+1}x_{t-r-1} + E\alpha_t + DE\alpha_{t-1} + \ldots + D^rE\alpha_{t-r}$$

oder

$$x_t = D^{r+1}x_{t-r-1} + \sum_{r=o}^{\infty} D^rE\alpha_{t-r}.$$

Die Elemente der Matrizen D^rE stellen den Einfluß der Veränderung der j-ten exogenen Variablen im Zeitpunkt t-r auf die i-te endogene Variable im Zeitpunkt t dar:

$$\frac{\delta x_{it}}{\delta \alpha_{j,t-r}}$$

---

1) Der Begriff stammt von Goldberger: " ... impact multipliers ... express that part of the response of endogenous variables to changes of predetermined variables which occurs in the first year." GOLDBERGER (1959), S. 16. Diese Definition umfaßt natürlich auch die Matrix D. Da gewöhnlich jedoch der Begriff Multiplikator den Einfluß einer exogenen auf eine endogene Variable kennzeichnet, nennen wir nur die Elemente der Matrix E 'impact multipliers', wie dies auch WALLIS, S. 789 und THEIL/BOOT, S. 139, tun.

Theil und Boot nennen diese Multiplikatoren 'interim multipliers' [1].

Als 'total multiplier' bezeichnen sie folgenden Ausdruck

$$\sum_{r=o}^{\infty} \frac{\delta x_{it}}{\delta \alpha_{j,t-r}} \quad ,$$

wenn sich die Summe einem endlichen Grenzwert nähert. Diese Multiplikatoren sind Elemente der Matrix

$$\sum_{r=o}^{\infty} D^r E \quad ,$$

für die unter bestimmten Konvergenzbedingungen gilt[2]:

$$\sum_{r=o}^{\infty} D^r E = (I - D)^{-1} E.$$

Den gleichen Ausdruck bezeichnet Goldberger als 'equilibrium multiplier' oder 'ultimate multiplier'[3].

Hat das System sein Gleichgewicht erreicht, d.h. $x_t = x_{t-1} = \ldots = x^o$ und $\alpha_t = \alpha_{t-1} = \ldots = \alpha^o$

so erhalten wir aus Gleichung (11):

$$x^o = Dx^o + E\alpha^o \qquad \text{und somit}$$

$$x^o = (I - D)^{-1} E\alpha^o$$

Die Gleichgewichtsmultiplikatoren sind also Elemente der Matrix $(I - D)^{-1}E$.

---

1) THEIL/BOOT (1962), S. 143.

2) Ebenda, S. 143 f.

3) GOLDBERGER (1959), S. 122 f. und passim. 'Equilibrium multipliers' "represent the amount by which the endogenous system will change for a change in an exogenous variable, if it ist given all of the time it needs for the internal dynamic effects to work themselves out completely." BROWN (1970), S. 410.

Die Elemente der Matrizen, die aus den Teilsummen

$$\sum_{r=o}^{k} D^r E$$

entstehen, werden als 'dynamische Multiplikatoren' bezeichnet [1]. Ist k = 0, so wird der dynamische Multiplikator zum 'impact multiplier'. Der Grenzfall k = ∞ ergibt den 'equilibrium multiplier'.

Allerdings wurden Begriff und Theorie des Multiplikators nicht in dieser allgemeinen Form entwickelt. Noch 1961 wurde in einem Übersichtsartikel behauptet: "... die Multiplikatortheorie beschreibt den E i n k o m m e n s e f f e k t ... primärer Ausgabenänderungen." [2]

Die Auffassung von der Multiplikatortheorie entspricht mehr ihrer historischen Entwicklung als ihrer heutigen Form. Denn der eigentliche Aufschwung der Multiplikatortheorie begann damit, daß Keynes den Investitionsmultiplikator [3] zu einem wesentlichen Bestandteil seiner Beschäftigungstheorie machte. [4]

---

1) "Dynamic multipliers are period-by-period response rates of endogenous variables to exogenous shifts in levels, flows, or parameters. That is, they measure the response along the transient path to final equilibrium positions." FROMM/TAUBMAN (1968), S. 49, Fn. 7.

2) SCHILCHER (1961), S. 469.

3) $\delta Y/\delta I = 1/(1-b)$; vgl. S. 26.

4) "... in given circumstances a definite ratio, to be called the M u l t i p l i e r , can be established between income and investment and, subject to certain simplifications, between the total employment and the employment directly employed on investment (which we shall call the p r i m a r y e m p l o y m e n t). This further step is an integral part of our theory of employment, since it establishes a precise relationship, given the propensity to consume, between aggregate employment and income and the rate of investment." KEYNES (1936), S. 113. In RICHTER (1970), 4. Kap., ist eine ausführliche Darstellung des Investitionsmultiplikators sowie anderer Multiplikatoren vollständiger und partieller Makrosysteme zu finden.

Keynes war jedoch noch der Meinung, daß Kahn (1931) das Konzept des Multiplikators in die ökonomische Theorie eingeführt hätte [1]. Wesentliche Elemente des Prinzips sind aber schon sehr viel früher von anderen Ökonomen behandelt worden[2]. Fragen, die mit der Periodenabgrenzung und den zeitlichen Verzögerungen im Ablauf des Multiplikatorprozesses zu tun haben, wurden im Anschluß an Keynes vor allem von MACHLUP (1939), METZLER (1948) und ACKLEY (1951) behandelt.

---

1) KEYNES (1936), S. 113

2) Vgl. SCHNACK (1951), S. 148 - 154; HEGELAND (1954), Kap. I und II. Die Diskussion darum, wer was zur Multiplikatortheorie beigetragen hat, ist noch nicht beendet. Vgl. BOSERUP (1969). "Mr. Kahn's achievement, and that of Mr. Meade, whose contribution Mr. Kahn acknowledges on his first page, was to provide precise and sharpedged tools by which all these matters could be dissected and an insight gained into the nature of the whole process. To have disentangled successfully so subtle, complex and elusive a skein of vague interrogatives, which till then had been felt rather than thought, makes Mr. Kahn's article on 'The Relation of Home Investment to Unemployment' one of the most original contributions of the last fifty years." SHACKLE (1951), S. 242.

3. Qualitative Analyse

Zur Berechnung der in y enthaltenen n Multiplikatoren des komparativ-statischen Systems [1]

$$(8) \quad Ay = b$$

benötigt man die numerischen Größen der a_{ij} und der f^i_α. Sind diese nicht numerisch quantifiziert, kennt man also nur die Vorzeichen (+), (-), (0) [2] der partiellen Ableitungen der Funktionen des Systems (1), dann haben wir es mit einem Problem der 'qualitative economics' zu tun.

Definition: Das System (8) ist v o r z e i c h e n - l ö s b a r , wenn es möglich ist, aus der Kenntnis der Vorzeichen der Elemente von A und b die Vorzeichen eines oder mehrerer Elemente aus y herzuleiten. V o l l s t ä n d i g v o r z e i c h e n l ö s - b a r ist (8) dann, wenn das gesamte Vorzeichenbild von y, also die Vorzeichen a l l e r Elemente dieses Vektors eindeutig bestimmt werden können.

Die qualitative Analyse beschäftigt sich nun mit der Frage, unter welchen Bedingungen ein System vorzeichenlösbar oder sogar vollständig vorzeichenlösbar ist. Dieses Problem gliedert sich in mehrere Fragenkreise auf:

a) Welche Lösungsverfahren führen zu dem möglicherweise vorhandenen eindeutigen Vorzeichenbild von y? Bei welchen Lösungsverfahren tritt der geringste Informationsverlust auf?
b) Läßt sich die Koeffizientenmatrix der Systeme, deren Vorzeichenbild zu einem eindeutigen Vorzeichenbild des Lösungsvektors führen, in eine 'typische Form' bringen und welches Vorzeichenbild des Lösungsvektors gehört zu dieser typischen Form [3]?

---

1) Vgl. S. 25.
2) (0) wird hier als Vorzeichen interpretiert.
3) Insofern zu der typischen Form einer Matrix auch ein typisches Vorzeichenbild gehört, entspricht die Herleitung dieser typischen Form aus der gegebenen Koeffizientenmatrix zumindest zum Teil einem Lösungsverfahren (vgl. Abschnitt 3.2).

c) Lassen sich zusätzliche Informationen und Annahmen (z.B. Walras Gesetz, Homogenitätspostulat, correspondence principle) in das qualitative System einfügen, um die komparativ-statischen Ergebnisse zu vervollständigen? [1]

Bei der Behandlung der Frage a) stellen wir zunächst dem herkömmlichen Lösungsverfahren (Abschnitt 3.1.1) den Lösungsansatz von Samuelson (3.1.2) und den sehr detaillierten Algorithmus von Lancaster (3.1.3) gegenüber und gehen dann in einem kritischen Vergleich der Lösungsverfahren (3.1.4) auch auf die Möglichkeiten ein, die Aussagefähigkeit des Lancasterschen Algorithmus zu erweitern.

Zum Fragekreis b) sind in der Literatur vier Standardformen entwickelt worden. Die Lancastersche Standardform (Abschnitt 3.2.1) und die Gormansche Form (3.2.2) sind Spezialfälle, die in der allgemeineren zerlegbaren Form (3.2.3) vorhanden sind. Eine in ihrem analytischen Instrumentarium von den anderen stark abweichende Form, die Matrizen mit Hilfe von Ketten und Zyklen darstellt, untersuchen wir in Abschnitt 3.2.4.
Alle Formen können unter bestimmten Bedingungen als Verfahren zur Auffindung des Vorzeichenbildes des Multiplikatorvektors dienen. Sie sind jedoch weit mehr. Denn als 'typische' Vorzeichenbilder charakterisieren sie zugleich den Aufbau bzw. die Kausalordnung des zugrundeliegenden Systems. Bringt man ein komparativ-statisches System in eine typische Form, so erhält man zugleich eine Beschreibung der Art des Zusammenhangs zwischen den endogenen Variablen und der Wirkungsbeziehungen zwischen den endogenen und exogenen Variablen [2].

---

1) Diesen Fragenkreis behandeln wir in unserer Arbeit nicht. Einen ausführlichen Überblick über die Stabilitätsprobleme geben QUIRK/SAPOSNIK (1968), S. 205 - 216. Vgl. außerdem QUIRK/RUPPERT (1965), HABIBAGAHI (1966), BASSET/HABIBAGAHI/QUIRK (1967), BASSET/MAYBEE/QUIRK (1968), QUIRK (1 und 2) (1968), QUIRK (1969).

2) Vgl. die Abschnitte 2.2, bes. S. 20 - 22, 3.2.1.3 und 3.2.3.3.

Insbesondere werden wir in Abschnitt 3.2.5 darstellen, daß die charakteristischen Eigenschaften eines vorzeichenlösbaren komparativ-statischen Systems in der Sprache der Ketten und Zyklen auch den charakteristischen Eigenschaften der zugehörigen Kausalordnung entsprechen.
Auf einen Unterschied wollen wir vorweg hinweisen: Für die Charakterisierung der Kausalordnung eines linearen Modells, wie es z.B. durch

$$(1a') \qquad Ax + B\alpha = 0$$

dargestellt wird, genügt es zu wissen, welche der Koeffizienten der Matrizen A und B ungleich Null sind. Für die Ermittlung des Vorzeichens der Multiplikatoren, bzw. für die Frage, ob die Vorzeichen der Multiplikatoren überhaupt ermittelt werden können, wird es zumeist von ausschlaggebender Bedeutung sein, ob das Vorzeichen eines Koeffizienten positiv oder negativ ist. Die Menge der Vorzeichenbilder, die die Kausalordnung eines komparativ-statischen Systems umfaßt, wird also nur in Spezialfällen mit der Menge der Vorzeichenbilder übereinstimmen, mit deren Hilfe man zu eindeutigen Aussagen über die Vorzeichen der Multiplikatoren gelangen kann. Mit anderen Worten: Typische Vorzeichenbilder enthalten typische Kausalordnungen, aber typische Kausalordnungen enthalten keine typischen Vorzeichenbilder.

3.1 Lösungsverfahren zur Ermittlung der Multiplikatoren

3.1.1 Die herkömmlichen Lösungsverfahren

Um die herkömmlichen Verfahren zur Ermittlung der Multiplikatoren kurz zu resümieren, benutzen wir das folgende einfache Keynessche Modell:

$$(1) \quad C(Y) + I(i) + I^* - Y = 0$$
$$(2) \quad L(Y,i) - M^a/p = 0$$

endogen: Y, i
exogen: I^*, M^a, p (I^* = autonome Investition)

Die erweiterte Koeffizientenmatrix hat folgendes Aussehen, wobei wir die Abkürzungen

$$\delta C/\delta Y = C_Y, \ \delta I/\delta i = I_i \text{ usw.}$$

benutzen:

Variable

endogene		exogene	
Y	i	I^*	M^a
$(C_Y - 1)$	I_i	1	0
L_Y	L_i	0	$-1/p$

Die üblichen Annahmen über die partiellen Ableitungen führen zu folgendem Vorzeichenbild der erweiterten Koeffizientenmatrix:

Variable

endogene		exogene	
Y	i	I^*	M^a
-	-	+	0
+	-	0	-

Wir wenden nun die Cramersche Regel an und erhalten folgende Multiplikatoren:

$$\frac{\delta Y}{\delta I^*} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & I_i \\ 0 & L_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (C_Y-1) & I_i \\ L_Y & L_i \end{vmatrix}} = \frac{L_i}{(C_Y-1)L_i - I_i L_Y}$$

oder unter Benutzung des Vorzeichenbildes

$$\frac{\delta Y}{\delta I^*} = \frac{\begin{vmatrix} - & - \\ 0 & - \\ - & - \\ + & - \end{vmatrix}}{} = \frac{(-)(-)}{(-)(-) - (+)(-)} = \frac{(+)}{(+)} > 0$$

$$\frac{\delta Y}{\delta M^a} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & I_i \\ 1/p & L_i \\ (C_Y-1) & I_i \\ L_Y & L_i \end{vmatrix}}{} = \frac{(-1/p)I_i}{(C_Y-1)L_i - I_i L_Y}$$

$$\frac{\delta Y}{\delta M^a} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & - \\ + & - \\ - & - \\ + & - \end{vmatrix}}{} = \frac{-(+)(-)}{(-)(-) - (+)(-)} = \frac{(+)}{(+)} > 0$$

$$\frac{\delta i}{\delta I^*} = \frac{\begin{vmatrix} (C_Y-1) & -1 \\ L_Y & 0 \\ (C_Y-1) & I_i \\ L_Y & L_i \end{vmatrix}}{} = \frac{L_Y}{(C_Y-1)L_i - I_i L_Y}$$

$$\frac{\delta i}{\delta I^*} = \frac{\begin{vmatrix} - & - \\ + & 0 \\ - & - \\ + & - \end{vmatrix}}{} = \frac{-(+)(-)}{(-)(-) - (+)(-)} = \frac{(+)}{(+)} > 0$$

$$\frac{\delta i}{\delta M^a} = \frac{\begin{vmatrix} (C_Y-1) & 0 \\ L_Y & 1/p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (C_Y-1) & I_i \\ L_Y & L_i \end{vmatrix}} = \frac{(1/p)(C_Y-1)}{(C_Y-1)L_i - I_i L_Y}$$

$$\frac{\delta i}{\delta M^a} = \frac{\begin{vmatrix} - & 0 \\ + & + \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} - & - \\ + & - \end{vmatrix}} = \frac{(-)(+)}{(-)(-) - (+)(-)} = \frac{(-)}{(+)} < 0 .$$

Bei dem einfachen Beispiel, das wir gewählt haben, tritt der Nachteil der herkömmlichen Berechnungsart der Multiplikatoren nicht so deutlich hervor. Bei größeren Systemen mit mehreren Variablen wird diese Methode sehr unhandlich. Schon eine 4x4 Determinante verursacht einen unangenehmen Rechenaufwand, ohne daß man gewiß sein kann, daß der Multiplikator ein eindeutiges Vorzeichen besitzt.

3.1.2 Der Beitrag von Samuelson

Der erste, der sich mit diesem Problem in allgemeiner Form beschäftigte, war Samuelson[1]. Nach Gleichung (10) [2] ergibt sich das Vorzeichen eines Multiplikators aus dem Quotienten zweier nxn Determinanten. In Zähler und Nenner stehen also jeweils n! Produkte aus n Elementen. Nur das Vorzeichen, nicht die Größe jedes Produkts ist bekannt. In den Fällen, in denen $a_{ij} \neq 0$, $f^i_{\alpha} \neq 0$ für $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,n$, steht das Vorzeichen der Determinante nur dann unzweideutig fest, wenn alle n! Produkte das gleiche Vorzeichen aufweisen.

---

1) SAMUELSON (1947), S. 24 - 29.

2) S. 25.

Wenn z.B. n = 7 ist, gibt es $2^{49} = 561.10^{12}$ unterschiedliche Vorzeichendeterminanten, die jeweils 7! = 5040 Produkte enthalten. Bei n = 10 beträgt die Zahl der Produkte schon 3.628.800. Zwar werden wir es in der ökonomischen Theorie selten mit Fällen zu tun haben, in denen eine völlig integrierte Struktur vorliegt (kein $a_{ij} = 0$) und außerdem keine Vermutungen darüber vorhanden sind, welche numerischen Werte zumindest einige der a_{ij} besitzen. Aber vor der Untersuchung der möglichen Erleichterung des Lösungsverfahrens durch zusätzliche Informationen ist das Problem in seiner allgemeinen Form darzustellen:

Wie groß die Schwierigkeiten sind, sieht man selbst dann, wenn man mit der vereinfachenden Annahme arbeitet, daß ein Parameter nur eine der Gleichgewichtsrelationen ändert (z.B. die erste). Es gelte $f^1_\alpha > 0$, $f^i_\alpha = 0$ für i=2,...,n. Die Koeffizientenmatrix A in Gleichung (8) [1] kann 2^{n^2} mögliche Vorzeichenbilder annehmen. Die Zahl der möglichen Vorzeichenbilder des Multiplikatorvektors y beträgt 2^n. Das Vorzeichenbild von b sieht folgendermaßen aus: sign b' = (- 0 ... 0).

Das System wäre nur dann vollständig vorzeichenlösbar, wenn von den 2^n möglichen Vorzeichenbildern von y alle außer einem aufgrund der Vorzeichenbilder der Matrix A und des Vektors b gestrichen werden könnten.

Wenn wir in Gleichung (8) die Vorzeichen der Multiplikatoren einsetzen, fallen von den 2^n Kombinationen alle die heraus, die das gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichenbild wie die n-1 letzten Zeilen der Matrix A aufweisen, weil die Summe der Zeilen sonst - entgegen der Annahme - ungleich Null wäre. Jede der (n-1) letzten Zeilen löscht also zwei mögliche Vorzeichenbilder von y, falls keine Zeile doppelt vorkommt.

---

1) S. 25.

Außerdem kann die Vorzeichenkombination des Vektors y gestrichen werden, die das gleiche Vorzeichenbild wie die erste Zeile aufweist, weil sonst entgegen unserer Annahme das erste Element von b positiv sein müßte. Von den 2^n möglichen Vorzeichenbildern von y können also bestenfalls aufgrund der gegebenen Informationen (2n-1) gestrichen werden. Ist z.B. n = 7, so können aufgrund dieser Überlegungen bloß 13 der 2^7 = 128 möglichen Vorzeichenbilder von y als Lösungsvektoren wegfallen. Damit ist natürlich nicht sehr viel gewonnen. Durch die Annahme, daß einige a_{1j} ungleich Null sind, können wir die möglichen Vorzeichenbilder des Multiplikatorvektors weiter einschränken. Dies gilt allerdings nur insofern als keine Überschneidungen mit dem vorherigen Eliminierungsprozeß auftreten. Wenn in einer Reihe von A r Nullen enthalten sind, entfallen 2^{r+1} der möglichen Vorzeichenbilder von y. Ist das Vorzeichen von k Multiplikatoren bekannt, so vermindert sich die Zahl der möglichen Vorzeichenbilder von y auf 2^{n-k}.

3.1.3 Das Lancastersche Lösungsverfahren

Auf ähnlichen Überlegungen, wie sie im vorigen Abschnitt dargestellt wurden, baut auch der Algorithmus auf, den Lancaster entwickelt hat. Die dabei anzuwendende Technik erlaubt es, auch dann noch Aussagen über die komparativ-statischen Eigenschaften des Systems zu machen, wenn das System nicht vollständig vorzeichenlösbar ist.

Wir nehmen nun wiederum an, daß nur eine exogene Variable sich verändert.

Die Gleichung (5) (S. 23) lautet dann

$$(5') \quad df^i = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, dx_j + f^i_\alpha\, d\alpha = 0\,, \quad i = 1,\ldots,n$$

Wir schreiben sie in folgender Form:

(12) $Ac = 0$,

wobei

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & f_\alpha^1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & f_\alpha^n \end{bmatrix}$$

und

$$c' = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n, d\alpha)$$

(12) stellt ein Gleichungssystem mit n Gleichungen und n+1 Unbekannten dar.
Der Lösungsalgorithmus soll nun dazu dienen, das Vorzeichenbild oder die Vorzeichenbilder des Vektors c schnell und einfach zu ermitteln, wenn bloß die Vorzeichen, nicht aber die numerischen Werte der partiellen Ableitungen a_{ij} bzw. f_α^i bekannt sind. Er beruht im wesentlichen darauf, Zeile für Zeile der Matrix A danach abzufragen, mit welchem der möglichen Vorzeichenbilder des Vektors c sie vereinbar ist. Dazu werden die Vorzeichenbilder der Zeilen der Matrix A in verschlüsselter Form (I und II) niedergeschrieben und mit den verschlüsselten möglichen Vorzeichenbildern des Vektors c (LISTE) verglichen und nach einem Streichungsverfahren die restlichen verschlüsselten Vorzeichenbilder (L) überprüft.

3.1.3.1 Lösungsvektoren ohne Nullelemente [1)]

Zur Darstellung der Methode diene das folgende Beispiel. Die Matrix A laute:

$$\begin{bmatrix} - & - & + & 0 \\ + & - & + & - \\ 0 & - & - & 0 \end{bmatrix}$$

1) LANCASTER (1966), S. 282 - 286.

1. Schreibe [1]
   a. z für 0
   b. o für -
   c. 1 für +

   Dann erhält man aus der obigen Matrix

   I
   oo1z a
   1o1o b
   zooz c

2. Schreibe
   a. z für 0
   b. 1 für -
   c. o für +

   Dann erhält man aus der obigen Matrix

   II
   11oz a
   o1o1 b
   z11z c

3. Schreibe der Ordnung nach die Zahlen o bis $2^n-1 = 7$ in $(n+1) = 4$-stelligen binären Zahlen auf:

   LISTE

oooo	Ic	
ooo1	Ic	
oo1o	Ia	L o1oo
oo11	Ia	
o1oo		
o1o1	IIb	
o11o	IIc	
o111	IIc	

4. Betrachte sämtliche Reihen von A
   a. Wenn eine Reihe mit 1 beginnt, vernachlässige sie.
   b. Wenn eine Reihe mit o beginnt und kein z aufweist, wird sie als binäre Zahl behandelt und bei LISTE weggestrichen.
   c. Wenn eine Reihe mit o beginnt und zumindest ein z enthält oder mit z beginnt, streiche man in LISTE jede Zahl aus, die dieselben Symbole an den Stellen hat, die nicht mit z besetzt sind, wie die fragliche Reihe.

---

1) Für die Zahl Null verwenden wir das Zeichen '0'. Das Vorzeichen (-) wird durch ein kleines 'o' verschlüsselt.

5. Für II wird 4. ausgeführt. In unserem Fall haben wir hinter LISTE die Reihen aufgeschrieben, die aus I und II die Zahlen in LISTE eliminieren[1].

6. Die Zahlen, die von LISTE nach dem Streichungsprozeß übrig bleiben, L, stellen die Lösung in dem Sinne dar, daß jede solche Zahl die verschlüsselte Form des Vorzeichenbildes eines Lösungsvektors ist, die für eine Menge von numerischen Werten in der Matrix A gilt.

In unserem Beispiel bleibt die binäre Zahl o1oo übrig. Die Lösung hat ein eindeutiges Vorzeichenbild, das entweder als (- + - -) (Schlüssel I) oder als (+ - + +) (Schlüssel II) entschlüsselt werden kann. Jedes Verhältnis zweier Elemente im Lösungsvektor hat ein eindeutiges Vorzeichen. Wenn in LISTE nach der Streichung mehr als eine Zahl übrig bleibt [2], ist das System nicht vollständig qualitativ bestimmt. Man kann jedoch folgende Aussage machen:
Die i-te und j-te Variable ändern sich immer in der gleichen Richtung, wenn die i-ten und j-ten Stellen im Lösungsvektor in allen Fällen o,o oder 1,1 sind, oder sie ändern sich immer in entgegengesetzter Richtung, wenn sie in allen Fällen o,1 oder 1,o sind.

Der Algorithmus beruht auf folgenden Überlegungen.[3]
Das Gleichungssystem Ac = O kann man auch schreiben

$$A_i c = O$$

oder

$$\sum_j a_{ij} c_j = O. \qquad i = 1,\ldots,n$$

---

1) In späteren Beispielen wird es oft mehrere Reihen aus I und II geben, die eine Zahl eliminieren. Wir werden jedoch zumeist nur eine Reihe angeben.

2) Die Lösungsmenge umfaßt dann mehr als einen Vektor.

3) LANCASTER (1966), S. 292 - 294.

Dabei sind möglich:

folgende Produkte	und	folgende Summen
1. o x o = 1		o + o = o
2. 1 x 1 = 1		1 + 1 = 1
3. o x 1 = 1 x o = o		o + 1 = 1 + o = ?
4. o x z = z x o = z		o + z = z + o = o
5. 1 x z = z x 1 = z		1 + z = z + 1 = 1
6. z x z = z		z + z = z

Nehmen wir A_i = o1zo und c = oo11 zur Illustration.
Dann ist $A_i c$ = (oxo) + (1xo) + (zx1) + (ox1)
= 1 + o + z + o

Die Gleichung $A_i c = 0$ kann nur erfüllt sein, wenn

$$\sum_j a_{ij} \, c_j$$

sowohl o als auch 1 enthält (abgesehen von dem Fall c = 0).
Ein z in A_i berührt das Vorzeichen der Summe nicht, weil o x z = 1 x z = z x z = z. Das dritte Element im Vektor A_i kann deshalb vernachlässigt werden. Wir schreiben [1)]

$$A_i = o1 * o$$

Nun wollen wir die Vorzeichenbilder von c herausfinden, die kein z enthalten und $A_i c = 0$ erfüllen.

Alle Vorzeichenbilder außer o1 * o und 1o * 1 erfüllen die Gleichung, z.B. 11 * o oder oo * 1, wobei für * beliebig 1 oder o zu setzen ist.

Alle Vorzeichenbilder außer den folgenden sind Lösungsvektoren von Ac = 0:

1. Solche Vorzeichenbilder, die identisch sind mit einem A_i in den Elementen, die kein z sind.
2. Solche Vorzeichenbilder, die A_i entgegengesetzt sind in allen Elementen, die ungleich z sind, d.h. bei denen im ursprünglichen A_i o durch 1 und 1 durch o ersetzt wird.

---

1) '*' symbolisiert ein beliebiges Vorzeichen.

Wenn wir alle 2^{n+1} möglichen Vorzeichenbilder von z in der Form der binären Zahlen von 0 bis $(2^{n+1} -1)$ niederschreiben, können wir aus dieser Liste alles streichen, was mit dem Vorzeichenbild irgendeines A_i oder eines $-A_i$ identisch ist. Die übrigbleibenden Vorzeichenbilder sind Lösungen der n Gleichungen Ac = 0. Wenn c eine Lösung ist, ist -c auch eine. Beim Lösungsverfahren braucht deshalb nur die Hälfte der möglichen Kombinationen von c berücksichtigt zu werden, nämlich die binären Zahlen von 0 bis $2^n -1$.

3.1.3.2 Lösungen mit Null-Elementen [1)]

Bisher haben wir nur Lösungsvektoren betrachtet, die kein Element enthalten, das gleich Null ist. Die Lösungsvektoren, die Nullen enthalten, können wir durch folgenden Lösungsweg herausfinden:

1. Wir schreiben die Zahlen aus L auf.
2. Wir ersetzen in L o durch 1 und 1 durch o und erhalten eine Zahlenmenge N.
3. Wir suchen alle Vektoren aus L und N, die sich nur in einer Zahlenstelle unterscheiden, setzen ein z an diese Stelle und lagern den so entstandenen Vektor.
4. Wir wiederholen den Schritt 3. mit den jeweils neu gebildeten Zahlen so oft wie möglich.

1.	L	oooo	1
		oo11	2
		o1oo	3
		o111	4
2.	N	1111	5
		11oo	6
		1o11	7
		1ooo	8
3.	1/3	ozoo	a
	1/8	zooo	b
	2/4	oz11	c
	2/7	zo11	d
	3/6	z1oo	e
	4/5	z111	f
	5/7	1z11	g
	6/8	1zoo	h

1) LANCASTER (1966), S. 290 f.

4. a/h
   b/c zzoo

   c/g
   d/f zz11

Die Lösung lautet also: (00++) oder (00--).

Dieser Algorithmus läßt sich mit folgenden Überlegungen rechtfertigen[1]:
Als Lösungsvektoren, die Nullen enthalten, kommen nur die Zahlen in Frage, die in L (oder N) übriggeblieben sind, weil die gestrichenen Vektoren auch durch Einführung von Nullen nicht die Bedingung Ac = 0 erfüllen können.
Allerdings erfüllen nur solche Lösungsvektoren aus L und N das Gleichungssystem, die durch das Einführen eines Nullelementes in den anderen Elementen einem gestrichenen Vektor nicht gleich werden. Es dürfen durch das Einführen eines Nullelements also nur solche Vektoren als Lösungsvektoren entstehen, die in den übrigen Elementen einem Vektor gleich sind, der bereits in L oder N vorhanden ist.
Sind in L z.B. die Vektoren oooo und o1oo vorhanden, so ist auch ozoo ein Lösungsvektor.
Diese Überlegungen führen auch zu dem Ergebnis, daß es keine Lösungsvektoren mit Nullelementen geben kann, wenn L nur einen Vektor enthält[2]. Würden wir dann irgendein Element dieses Vektors durch ein z ersetzen, dann erhielten wir ein Vorzeichenbild, das in den übrigen Elementen sowohl einer gestrichenen binären Zahl als auch dem einzigen Lösungsvektor gleich wäre.

---

1) Lancaster benutzt zum Beweis der Richtigkeit dieses Lösungsverfahrens ((1966), S. 294 f.) die in einem früheren Aufsatz (LANCASTER (1965)) entwickelten Theoreme. Die komplizierte Sprache der Theorie konvexer Körper scheint uns hier nicht nötig zu sein.

2) Vgl. aber Abschnitt 3.1.3.3.

Nehmen wir z.B. an, als Ergebnis des ersten Lösungsverfahrens erhielten wir den einzigen Vektor

L o11o .

Alle anderen binären Zahlen aus LISTE, nämlich

R oooo
ooo1
oo1o
oo11
o1oo
o1o1
o111

seien gestrichen worden.

Es gäbe vier Möglichkeiten, Nullelemente in den Lösungsvektor einzuführen:

		entsprechende Zahl aus R
a)	o11z	o111
b)	o1zo	o1oo
c)	oz1o	oo1o
d)	z11o	ooo1

Alle vier Zahlen fallen als Lösungsvektoren weg, weil sie (oder der negative Wert dieser Zahl (Fall d)) mit einer gestrichenen binären Zahl übereinstimmen, weil es also in der dem System zugrundeliegenden Matrix eine Zeile gibt, deren Produkt mit diesem Vektor ungleich Null wäre.

Enthält L also nur einen einzigen Vektor, so ist dies auch tatsächlich die einzige Lösung für das Gleichungssystem Ac = O.

3.1.3.3 Degenerierte Systeme[1)]

Enthält die Matrix des zu untersuchenden Systems eine Reihe, die nur ein einziges Element aufweist, das ungleich Null ist, so würde der Algorithmus dazu führen, daß alle Zahlen in LISTE gestrichen werden. Die betreffende Reihe hat die Form

$$a_{ij}c_j = O, \text{ so daß } c_j = O,$$

und zwar für jeden Lösungsvektor. Um die Lösungs-

1) Ebenda, S. 291.

vektoren herauszufinden, die keine Nullen enthalten, kann man die fragliche Zeile und die Spalte streichen, die das Element enthält, das ungleich Null ist. Der Algorithmus wird auf das restliche System angewendet und in der Lösung ein z für die gestrichene Variable eingetragen. Lautet das verschlüsselte System z.B.

zz1z
1o1o
zoo1,

so kann man die erste Zeile und die dritte Spalte streichen, d.h. $c_3 = 0$. Auf den Rest wendet man das Verfahren an:

1.	I	1oo a	II	o11 a	
		zo1 b		z1o b	
2. LISTE		ooo	3. L	ooo	
		oo1 Ib			
		o1o IIb			
		o11 IIa			

Die endgültige Lösung lautet also: oozo.

Allerdings hat Lancaster übersehen, daß der Algorithmus auch auf andere als degenerierte Systeme[1] nicht unmittelbar anwendbar ist. Versuchen wir es mit folgender Vorzeichenmatrix:

		+ - + -			
		0 + - 0			
		0 + + 0			
1.	I	1o1o a	II	o1o1 a	
		z1oz b		zo1z b	
		z11z c		zooz c	
2.	LISTE	oooo	IIc		
		ooo1	IIc		
		oo1o	IIb		
		oo11	IIb		
		o1oo	Ib		
		o1o1	Ib, IIa		
		o11o	Ic		
		o111	Ic		

Alle Zahlen aus LISTE werden eliminiert. Wir können also auf diese Art und Weise die Lösung nicht finden. Wenn wir die zweite und vierte Spalte der obigen Vorzeichenmatrix vertauschen, sehen wir, daß wir folgende

1) Im Lancasterschen Sinne also Systeme, deren Koeffizientenmatrizen mindestens eine Zeile enthalten, die nur ein Element ungleich Null aufweist.

Zerlegung vornehmen können:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

wobei $A_{11} = [+ \; -]$ $\quad A_{12} = [- \; +]$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} + & - \\ + & + \end{bmatrix}$$

Das System $A_{22}c^2 = 0$, wobei c^2 wegen der Vertauschung der Spalten die Variablen c_2 und c_3 enthält, liefert uns aufgrund des Vorzeichenbildes von A_{22} die Lösung $c^2 = 0$, so daß wir die entsprechenden Zeilen und Spalten streichen können[1]. Aus dem Restsystem

$$A_{11}c^1 = 0 \qquad c^1 = (c_1, c_4)$$

ergibt sich für das Vorzeichenbild des Vektors c:

$$\text{sign } c = (+ \; 0 \; 0 \; +).$$

Allgemein kann der Algorithmus nur auf Systeme angewendet werden, die nicht im obigen Sinne zerlegbar sind.

3.1.3.4 Die Einbeziehung quantitativer Informationen

Haben wir es nicht mit einem rein qualitativen System zu tun, in dem außer dem Vorzeichen der a_{ij} und der f_α^i nichts weiter bekannt ist, sondern besitzen wir auch noch Informationen über die Größenordnung einiger Koeffizienten, so ist es möglich, diese quantitativen Informationen in das Lancastersche Lösungsverfahren einzubauen[2]. Diese Möglichkeit wollen wir mit Hilfe des Modells erklären, das wir zur Darstellung der herkömmlichen Lösungsverfahren benutzt haben (S. 34). Wir schreiben das Modell zu diesem Zweck etwas ausführlicher

$$C + I - Y = 0$$
$$C(Y) - C = 0$$

---

1) Vgl. auch Abschnitt 3.1.3.5, S. 49.

2) LANCASTER (1966) S. 288 - 29o.

$$I(i) + I^* - I = 0$$
$$L(Y,i) - M^a/p = 0$$

endogen: Y, i, C, I
exogen : I^*, M^a, p

Wir differenzieren die Gleichungen und gehen davon aus, daß nur I^* sich ändere:

$$dC + dI - dY = 0$$
$$C_Y dY - dC = 0$$
$$I_i di + dI^* - dI = 0$$
$$L_Y dY + L_i di = 0$$

Dann erhalten wir folgende Koeffizientenmatrix:

Y	i	C	I	I^*
-1	0	1	1	0
C_Y	0	-1	0	0
0	I_i	0	-1	1
L_Y	L_i	0	0	0

und folgendes Vorzeichenbild:

Y	i	C	I	I^*
-	0	+	+	0
-	0	-	0	0
0	-	0	-	+
+	-	0	0	0

Wir wenden nun das Lancastersche Verfahren an[1]:

1.			2. LISTE		
	oz11z	a	ooooo		o1ooo
	zozo1	b	oooo1	b	o1oo1
	oz1zz	c	ooo1o		o1o1o
	z1z1o	d	ooo11		o1o11
	o1zzz	e	oo1oo	} e	o11oo
			oo1o1		o11o1
			oo11o	} c	o111o
			oo111		o1111

1) Wir lassen im folgenden der Einfachheit halber immer die Reihen weg, die mit 1 beginnen, weil sie keine Zahl aus LISTE eliminieren und fassen die nicht mit 1 beginnenden Reihen unter 1. zusammen.

3. L ooooo
ooo1o f
ooo11 f

Auf den ersten Versuch hin liefert das Verfahren also eine Lösungsmenge, die nicht eindeutig ist. Wir wissen aber (vgl. S. 35), daß die Multiplikatoren eindeutig zu ermitteln sind.
Mit Hilfe der Linearkombination verschiedener Zeilen der Koeffizientenmatrix können wir die quantitativen Informationen auswerten, die in der Koeffizientenmatrix enthalten sind.
Bilden wir im vorliegenden Falle die Summe der ersten und zweiten Zeile der Koeffizientenmatrix, so erhalten wir

$$(C_Y\text{-}1) \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0.$$

Da $(C_Y\text{-}1) < 0$, hat die Zeile das folgende Vorzeichenbild:

$$- \; 0 \; 0 \; + \; 0.$$

Die Verschlüsselung lautet: ozz1z f.

f eliminiert aus L alle Zahlen bis auf ooooo, so daß die eindeutige Lösung lautet:

$$(dY/dI^*, \; di/dI^*, \; dC/dI^*, \; dI/dI^*) = (+ \; + \; + \; +).$$

3.1.3.5 Die Anwendung des Verfahrens auf Determinanten[1)]

Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das nxn Gleichungssystem Aw = 0 eine nicht triviale Lösung ($w \neq 0$) aufweist, ist, daß für die Determinante des Systems gilt: /A/ = 0. Wenn /A/ ≠ 0, besitzt Aw = 0 nur eine triviale Lösung w = 0. Wenden wir auf A den Lancasterschen Algorithmus an und stellen fest, daß alle Zahlen aus LISTE gestrichen werden, d.h. w = 0, so wissen wir, daß /A/ ≠ 0. /A/ muß in diesem Falle vorzeichenbestimmt sein, d.h. bei jeder beliebigen Größe der Elemente (unter Beibehaltung des Vorzeichenbildes) das gleiche Vorzeichen aufweisen.

---

1) LANCASTER (1966), S. 292.

3.1.4 Kritischer Vergleich der Lösungsverfahren

Aus der Darstellung der Begründung für das Lancastersche Lösungsverfahren geht hervor, daß Lancaster eigentlich nichts anderes getan hat als die von Samuelson angestellten Überlegungen[1] zu verschlüsseln und die Einbeziehung quantitativer Informationen zu berücksichtigen. Samuelson arbeitet mit dem System

$$(8) \quad Ay = b$$

und Lancaster mit dem System

$$(12) \quad Ac = 0.$$

Beide Schreibweisen sind nur eine Variante des Gleichungssystems

$$(5') \quad \sum_{j=1}^{n} f^i_{x_j} dx_j + f^i_a da = 0, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Gegen das Lancastersche Verfahren ist eine Reihe von kritischen Einwänden vorgebracht worden, die alle in der Behauptung gipfeln, die herkömmliche Technik der vollständigen Durchrechnung der Multiplikatoren (z.B. unter Anwendung der Cramerschen Regel) sei nach wie vor die einzige in allen Fällen zufriedenstellende Methode.

Basset versucht zu zeigen, daß "for certain macroeconomic models (not the particular one Lancaster chose) determinate comparative statics results are available without the use of 'quantitative' information even when Lancasters method does not indicate a unique solution."[2]

Lloyd folgt Basset in seiner Argumentation und formuliert den Einwand etwas genauer:[3]

Alle gestrichenen Vorzeichenbilder sind selbstverständlich unzulässig, aber es ist nicht immer richtig, daß alle Lösungsvektoren, die allein aufgrund der qualitativen Informationen unzulässig sind, auch gestrichen werden. D.h., es ist nicht notwendigerweise richtig, daß jedes Vorzeichenbild, das nach dem

---

1) Vgl. Abschnitt 3.1.2, S. 36 - 38.

2) BASSET (1968), S. 518.

3) LLOYD (1969), S. 348.

Streichungsprozeß übrig bleibt, einen Lösungsvektor darstellt. Wenn als Ergebnis des Lösungsverfahrens mehrere Vektoren stehen bleiben, können wir nicht sicher sein, daß es nicht doch bloß einen einzigen Lösungsvektor gibt.
Dieser Einwand betrifft natürlich auch die Anwendung des Lancasterschen Verfahrens auf Determinanten, d.h. wenn die Anwendung des Algorithmus auf eine Determinante dazu führt, daß aus LISTE keine Zahl mehr übrig bleibt, hat die Determinante ein eindeutiges Vorzeichen; bleiben jedoch nach dem Streichungsprozeß noch Zahlen übrig, so bedeutet dies nicht, daß die Determinante nicht möglicherweise doch vorzeichenbestimmt ist.

Wir wollen an dem Modell von Basset zeigen, inwieweit diese Argumentation zutrifft. Hierzu benötigen wir zusätzlich die Symbole G (= Staatsausgaben) und α (= Lageparameter der Arbeitsangebotsfunktion).

Das Modell besteht aus folgenden Gleichungen:

$$I(i,X(N(w'))) + C(i,X(N(w'))) + G - X(N(w')) = 0$$

$$L(i,X(N(w'))) - M^a/p = 0$$

$$N(w') - A(w',\alpha) = 0$$

<u>endogen</u>: w, p, i
<u>exogen</u> : G, M^a, α.

Die Koeffizientenmatrix der endogenen Variablen lautet unter Benutzung von Abkürzungen der Art $\delta C/\delta X = C_X$:

dp	di	dw
$(-w/p^2)BX_NN_w$,	$(I_i + C_i)$	$(1/p)BX_NN_w$,
$(-w/p^2)L_XX_NN_w$, + M^a/p^2	0	$(1/p)L_XX_NN_w$,
$(-w/p^2)(N_w, - A_w,)$	0	$(1/p)(N_w, - A_w,)$

Die Koeffizientenmatrix der exogenen Variablen lautet:

dG	dM^a	$d\alpha$
1	0	0
0	-1/p	0
0	0	$-A_\alpha$

Über die partiellen Ableitungen werden folgende Annahmen gemacht:

$I_X \geq 0$; $C_X > 0$; $X_N > 0$; $N_{w'} < 0$; $A_{w'} > 0$; $A_\alpha > 0$;

$I_i < 0$; $C_i < 0$; $L_X > 0$; $L_i = 0$; $B = (I_X + C_X - 1) < 0$.

Daraus ergibt sich folgende Vorzeichenmatrix:

dp	di	dw	dG	dM^a	$d\alpha$
-	-	+	+	0	0
+	0	-	0	-	0
+	0	-	0	0	-

Veränderungen von G

Durch Vertauschungen innerhalb der ersten vier Spalten der Vorzeichenmatrix erhalten wir:

di	dG	dp	dw
-	+	0	0
0	0	+	+
0	0	0	+

Die Matrix ist also zerlegbar, woraus folgt[1]:

$$dp = 0 \; ; \; dw = 0.$$

Es bleibt eine einzige Zeile übrig

di	dG
-	+

Man sieht sofort, daß die Lösung für diese Zeile nur lauten kann: (+ +) oder (- -).

Die Lösungsvektoren lauten also vollständig:

(dp di dw dG) = (0 + 0 +)

(dp di dw dG) = (0 - 0 -), woraus folgt:

$dp/dG = 0$; $di/dG > 0$; $dw/dG = 0$.

---

1) Vgl. Abschnitt 3.1.3.3. Der Algorithmus ist auf degenerierte Systeme nicht anwendbar.

Veränderungen von M^a

Wir wenden das Verfahren jetzt auf die ersten drei und die fünfte Spalte der Vorzeichenmatrix (S. 52) an:

1.	oo1z	a	2. LISTE	oooo	
	oz11	b		ooo1	
	oz1z	c		oo1o	a/c
				oo11	a/c
				o1oo	
				o1o1	
				o11o	c
				o111	c

3.	L	oooo
		ooo1
		o1oo
		o1o1

Veränderungen von α

Nun wird das Verfahren auf die ersten drei und die sechste Spalte der Vorzeichenmatrix (S. 52) angewandt:

1.	oo1z	a	2. LISTE	oooo	
	oz1z	b		ooo1	
	oz11	c		oo1o	a/b
				oo11	a/b
				o1oo	
				o1o1	
				o11o	b
				o111	b

3.	L	oooo
		ooo1
		o1oo
		o1o1

In beiden Fällen führt das Lancastersche Verfahren nicht zu einer eindeutigen Lösung.

Basset kommt aufgrund dieser Tatsache zu der Auffassung, daß die Koeffizientendeterminante und die Determinanten, die durch die Cramersche Regel entstehen, erst durchgerechnet werden müssen, um die eindeutigen Ergebnisse, die in diesem Fall tatsächlich vorhanden sind, zu erhalten. Er schreibt[1]:

> "Because of the chain nature of their coefficients and the connection of variables through the labor market, many macroeconomic models have determinate comparative statics results, although what is usually considered qualitative analysis indicates a nonunique solution. Since this result depends on cancellation of terms, it happens only with specific economic models and does not appear in

1) BASSET (1968), S. 523.

> any general approach to the problem. We suggest therefore that the possibility of cancellations be taken into account in the qualitative analysis of any specific economic model: if the particular system does not have a unique solution, the model should be checked further before it is categorized as not yielding qualitatively determinate comparative statics results."

Die spezielle Art der Verknüpfung der Koeffizienten und die daraus folgende Möglichkeit, daß im Zuge der Durchrechnung der Determinanten sich Teilelemente der Koeffizienten gegenseitig aufheben oder wegkürzen, muß nicht unbedingt zu der Folgerung führen, daß bloß die traditionelle Lösungstechnik dann die Ermittlung der eindeutigen Lösung erlaubt, wenn L mehrere Vektoren enthält. Zwei Argumente stützen diese Vermutung:

1. Auch in den Fällen, in denen quantitative Informationen vorlagen und die Anwendung des Lancasterschen Algorithmus auf die Ausgangsmatrix nicht zu einer eindeutigen Lösung führte, gelang es, ohne vollständige Ausrechnung aller Determinanten das Vorzeichen der Multiplikatoren zu ermitteln.
2. Es ist offenbar, daß es immer dann eine mit dem Lancasterschen Verfahren lösbare Vorzeichenmatrix geben muß, wenn die Vorzeichen der Multiplikatoren - durch welches Verfahren auch immer - eindeutig zu ermitteln sind.

Wir wollen an dem Bassetschen Modell zeigen[1)], daß es - ähnlich wie im Falle der Auswertung quantitativer Informationen - auch bei der teilweisen Verknüpfung der Koeffizienten möglich ist, mit Hilfe der Linearkombination verschiedener Zeilen das Lancastersche Verfahren so zu vervollständigen, daß es zu dem vorhandenen eindeutigen Vorzeichenbild der Multiplikatoren führt.

---

1) Nur für die Fälle $dM^a \neq 0$ und $d\alpha \neq 0$, denn für den Fall $dG \neq 0$ ist weder die Anwendung des Lancasterschen Verfahrens noch das Durchrechnen notwendig, weil wir es mit einem einfachen degenerierten System zu tun haben.

Veränderungen von M^a

Wenn man in der um die Spalte $dM^a = (0 \quad -1/p \quad 0)$ erweiterten Koeffizientenmatrix der endogenen Variablen (S. 51) das

$$-BX_N N_w,/(N_w,-A_w,) \text{ - fache}$$

der dritten zur ersten Zeile addiert, erhält man die Zeile

$$0 \quad (I_1 + C_1) \quad 0 \quad 0,$$

man kann also in dieser Koeffizientenmatrix die erste Zeile und die zweite Spalte streichen und di = 0 setzen.

Als Koeffizientenmatrix bleibt übrig

dp	dw	dM^a
$(-w/p^2)L_X X_N N_w,+ M^a/p^2$	$(1/p)L_X X_N N_w,$	$(-1/p)$
$(-w/p^2)\ (N_w, - A_w,)$	$(1/p)(N_w,-A_w,)$	0

Wenn man in dieser Matrix das

$$-L_X X_N N_w,/(N_w, - A_w,) \text{ - fache}$$

der zweiten zur ersten Zeile addiert, erhält man

M^a/p^2	0	$(-1/p)$	mit dem Vorzeichenbild
+	0	-	.

Auf alle drei Zeilen wenden wir den Lancasterschen Algorithmus an:

1.			2. LISTE		3. L	
	o11	a		ooo		ooo
	o1z	b		oo1	c	
	oz1	c		o1o	b	
				o11	b/c	

Die Lösung lautet also:

$$(dp\ di\ dw\ dM^a) = (+\ 0\ +\ +) \quad \text{bzw.}$$
$$(dp\ di\ dw\ dM^a) = (-\ 0\ -\ -),$$

woraus folgt:

$$dp/dM^a > 0;\ di/dM^a = 0;\ dw/dM^a > 0.$$

Veränderungen von α

Die erweiterte Koeffizientenmatrix besteht nun aus der Koeffizientenmatrix der endogenen Variablen und

der Spalte $d\alpha = (0 \quad 0 \quad -A_\alpha)$.

Die Lösungsvektoren lauteten (S. 53):

oooo	e
ooo1	
o1oo	d
o1o1	d .

Wenn man in der erweiterten Koeffizientenmatrix das $-B/L_X$ - fache der zweiten zur ersten Zeile addiert, ergibt sich

$$-BM^a/L_Xp^2 \quad (I_1+C_1) \quad 0 \quad 0$$ mit den

Vorzeichen + - 0 0 (d).

Dieser neue Vektor eliminiert alle Lösungsvektoren bis auf

oooo
ooo1 .

Wenn man das

$$-(N_w,- A_w,)/L_XX_NN_w, \text{ - fache}$$

der zweiten zur dritten Zeile addiert, ergibt sich

$$-(N_w,- A_w,)M^a/L_XX_NN_w,p^2 \quad 0 \quad 0 \quad -A_\alpha$$ mit dem

Vorzeichen - 0 0 - (e).

Dieses neue Vorzeichenbild eliminiert von den restlichen Lösungsvektoren auch noch oooo, so daß nur

ooo1

als Lösungsvektor übrig bleibt. Also gilt:

$(dp\ di\ dw\ d\alpha) = (- - - +)$ bzw.

$(dp\ di\ dw\ d\alpha) = (+ + + -)$, woraus folgt:

$dp/d\alpha < 0$; $dr/d\alpha < 0$; $dw/d\alpha < 0$.

Man muß natürlich an dieser Stelle auf die Frage eingehen, ob die Bildung von 'geeigneten' Linearkombinationen nicht ähnlich aufwendig ist wie das Durchrechnen der Determinanten. Geeignet sind vor allem solche Linearkombinationen, die mehr Nullen enthalten als die Zeilen, aus denen sie gebildet wurden oder die Nullen an anderen Stellen als die ursprünglichen Zeilen aufweisen. Gerade in den hier betrachteten Fällen, in denen die Koeffizienten aus Produkten von Elementen bestehen, die zum Teil übereinstimmen, läßt sich relativ einfach erkennen, wie man vorgehen muß:

> Man nehme zwei Zeilen der Koeffizientenmatrix, deren Koeffizienten gleiche Teilelemente aufweisen und vervielfache eine der beiden Zeilen mit dem negativen Wert des Quotienten aus den ungleichen Teilelementen beider Zeilen und addiere sie.

Nach dieser einfachen Regel sind alle Linearkombinationen in unserem Beispiel gebildet worden. Diese Methode ist deswegen relativ unkompliziert, weil die Koeffizienten mit gleichen Teilelementen schon bei dem Erstellen der Matrix auffallen.
Gleichwohl ist auch diese Methode recht 'unhandlich' in dem Sinne, daß sie Rechenaufwand verursacht, so daß die Frage bestehen bleibt, ob die herkömmlichen Methoden (Cramersche Regel) nicht doch vorzuziehen sind, zumindest bei der Analyse solcher Modelle, die in ihrem Aufbau dem Bassetschen Modell gleichen.
Man kann jedoch nachweisen, daß die mangelnde Vorzeichenlösbarkeit mit Hilfe des Lancasterschen Verfahrens nicht darauf zurückzuführen ist, daß die Koeffizienten des Modells aus Ketten von partiellen Ableitungen bestehen, sondern ihren Grund darin hat, daß in den Koeffizientenmatrizen Untermatrizen auftauchen, deren Determinante Null ist. Diese Untermatrizen enthalten dennoch keine quantitativen Informationen in dem Sinn, daß etwas über die numerischen Werte einzelner partieller Ableitungen bekannt wäre. Sie enthalten vielmehr Zeilen bzw. Spalten, deren Elemente (bzw. Teile davon) identisch sind.
Die Methode der Linearkombination verschiedener Zeilen nach der oben angegebenen Regel stellt im wesentlichen nichts anderes dar als die Berechnung der Unterdeterminanten und ist insofern weniger aufwendig als die Berechnung aller Determinanten, die durch die Anwendung der Cramerschen Regel entstehen.
Wir bringen die Beweisführung für diese Behauptungen jedoch erst im Anschluß an Abschnitt 3.2, da die in diesem Abschnitt behandelten Standardformen ebenfalls

und aus den gleichen Gründen nicht unmittelbar auf ein Modell vom Bassetschen Typ anwendbar sind (Abschnitt 3.3).

Lloyd hat einen weiteren Einwand gegen den Lancasterschen Algorithmus vorgebracht: [1]

Wenn alle endogenen Variablen eine eindeutige Vorzeichenänderung aufweisen, oder wenn das für einige der Fall ist, oder wenn einige Variable sich immer in derselben Richtung bewegen, so geht diese Information unmittelbar aus der Untersuchung der expliziten Lösung für y (Gleichung (9), S. 25) hervor. Jede verfügbare quantitative Information ist automatisch in der Lösung enthalten. Man kann mit Hilfe der konventionellen Techniken erkennen, welches der ökonomische Grund dafür ist, daß die Determinante der Matrix oder eine Cramersche Determinante und somit ein y_i nicht eindeutig vorzeichenbestimmt ist.

Gerade an dem Modell, das Lloyd dazu benutzt, um zu demonstrieren, daß die Methode der vollständigen Ausrechnung der Multiplikatoren dem Lancasterschen Verfahren überlegen ist, läßt sich aber zeigen, daß keine quantitative Information verloren geht und der Lancastersche Algorithmus einfacher zum Ziel führt, wobei auch der ökonomische Grund für die Lösbarkeit bzw. Nichtlösbarkeit leicht erkennbar ist.

Das Modell, in dem wir als zusätzliche Symbole T (= Steuereinnahmen) und S^h (= Ersparnis der Haushalte) benutzen, besteht aus folgenden Gleichungen:

$$I(i,X) = S^h(X,i,p) + T(X,p) - G$$

$$L(i,X,p) = M^a/p$$

$$X = X(p)$$

endogen: i,X,p
exogen: M^a,G

1) LLOYD (1969), S. 349 und 350 f.

Daraus erhält man durch totales Differenzieren:

$$\begin{bmatrix} (S_X^h + T_X - I_X) & (S_i^h - I_i) & (S_p^h + T_p) \\ L_X & L_i & \frac{M^a}{p^2} + L_p \\ 1 & 0 & - X_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX \\ di \\ dp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dG \\ \frac{dM^a}{p} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Folgende Einschränkungen gelten für die partiellen Ableitungen:

$$0 < S_X^h < 1; \quad S_i^h > 0; \quad I_i < 0; \quad 0 < I_X < S_X^h + T_X;$$

$$0 < T_X < 1; \quad L_X > 0; \quad L_i < 0; \quad X_p > 0.$$

Lloyd hat die Anwendung des Lancasterschen Verfahrens nicht dargestellt, sondern nur das Ergebnis. Dieses Ergebnis kann man nur erhalten, wenn man noch zusätzlich folgende Annahmen macht:

$$S_p^h + T_p = (-) + (+) < 0; \quad \frac{M^a}{p^2} + L_p = (+) + (-) < 0,$$

so daß wir folgendes Vorzeichenbild bei der Veränderung von G erhalten:

	dY	di	dp	dG	
	+	+	-	-	
	+	-	-	o	
	+	o	-	o	
1.	oo11	a		ooo1	a'
	o11z	b		o1oz	b'
	oz1z	c			
2. LISTE	oooo				
	ooo1				
	oo1o	c			
	oo11	a,c			
	o1oo				
	o1o1				
	o11o	b,c			
	o111	b,c			

3. L

oooo
ooo1 a'
o1oo b'
o1o1 b'

Aus L ergeben sich folgende Vorzeichenbilder für die Multiplikatoren:

$$\operatorname{sign}\left(\frac{dX}{dG}, \frac{di}{dG}, \frac{dp}{dG}\right) = \begin{matrix}(+ & + & +)\\ (- & - & -)\\ (+ & - & +)\\ (- & + & -).\end{matrix}$$

An L erkennt man, daß eine Umkehrung des Vorzeichens des dritten Elements der ersten und zweiten Reihe des Vorzeichenbildes der Koeffizientenmatrix (wodurch wir a' und b' erhalten) die Lösungsmenge eindeutig machen würde. Es würde dadurch keine Streichung in LISTE rückgängig gemacht, weil c die beiden ersten Reihen a und b enthält.
Dann bliebe aus L nämlich nur die Zahl

$$oooo = (++++) \quad \text{übrig,}$$

was bedeutet, daß

$$\frac{dX}{dG} > 0; \quad \frac{di}{dG} > 0; \quad \frac{dp}{dG} > 0.$$

Also liegt der ökonomische Grund für die Mehrdeutigkeit der Lösung darin, daß

$$a_{13} = S_p^h + T_p < 0 \quad \text{und} \quad a_{23} = M^a/p^2 + L_p < 0.$$ [1)]

Nun gilt es eben nur herauszufinden, welche Multiplikatoren davon betroffen werden, daß a_{13} und a_{23} in ihrem absoluten Betrag genügend groß werden, um die Wirkung anderer ökonomischer Effekte aufzuheben (größer als andere Koeffizienten oder deren Produkte zu werden).

---

1) Formal betrachtet, würde es auch genügen, wenn X_p negativ würde, aber das wäre ökonomisch nicht zu begründen.

Hierzu dienen folgende Überlegungen:
Ausgangspunkt ist die eindeutige Lösungsmenge, wenn a_{13} und a_{23} positiv sind.

a) Wenn bloß $a_{13} < 0$ und der absolute Betrag hinreichend groß ist, kehren sich alle Multiplikatorvorzeichen um, weil jetzt die Zeile ooo1 aus L zulässig wird, die dem Lösungsvektor (+ + + -) entspricht, d.h.

$$dX/dG < 0; \quad di/dG < 0; \quad dp/dG < 0.$$

Dies bedeutet, daß S_p^h nur in der Nennerdeterminante der nach der Cramerschen Regel ermittelten Determinanten vorkommen kann.

b) Wenn nur a_{23} negativ ist, gibt es zwei Möglichkeiten:

b1) Bloß das Vorzeichen von di/dG kehrt sich um, weil die Zeile o1oo = (+ - + +) zulässig wird.

b2) Der absolute Betrag von a_{23} kann aber auch hinreichend groß werden, so daß die Zeile o1o1 = (+ - + -) zulässig wird, so daß sich nur die Vorzeichen von dX/dG und dp/dG ändern. Das bedeutet, daß L_p auch in der Zählerdeterminante von di/dG erscheint.

Wenn a_{13} und a_{23} negativ sind und beide absolut hinreichend groß sind, gilt der Fall b2, so daß

$$\text{sign}(dX/dG, di/dG, dp/dG) = (- + -).$$

Ein Vergleich der Lösungsmenge L mit der verschlüsselten Matrix unter 1. genügt also, um festzustellen, welche Vorzeichen die Multiplikatoren in allen möglichen Fällen haben.*)

Dieser Vergleich zeigt auch, daß nicht nur die herkömmlichen Techniken Aussagen darüber liefern, wie sich die Multiplikatoren verändern, wenn sich die Vorzeichen der Koeffizienten oder ihre algebraischen Werte ändern [1]:

---

1) Wie Lloyd das z.B. annimmt. Vgl. LLOYD (1969), S. 349.

Änderungen der Vorzeichen von Koeffizienten führen zumeist entweder zur weiteren Tilgung von Lösungsvektoren aus L oder zur Zulassung von andern Zeilen aus LISTE, die vorher gestrichen wurden. In beiden Fällen läßt sich die Wirkung auf die Multiplikatoren aus der Veränderung der Lösungsmenge ermitteln. Änderungen der algebraischen Werte der Koeffizienten haben immer dann keinen Einfluß auf die Vorzeichen der Multiplikatoren, wenn die Lösung eindeutig ist, weil in einem vollständig vorzeichenlösbaren System alle Koeffizienten innerhalb ihres Vorzeichenbereichs beliebige Werte annehmen können. Anders ausgedrückt: In der Entwicklung der nach der Cramerschen Regel ermittelten Determinanten der Multiplikatoren kommen in diesem Fall nur Produkte vor, die alle das gleiche Vorzeichen aufweisen oder gleich Null sind. Welche Folgen die Veränderung der algebraischen Werte in Systemen hat, die nicht vollständig vorzeichenlösbar sind, zeigt eben falls ein Vergleich des Vorzeichenbildes der Koeffizien tenmatrix mit der Lösungsmenge L.

Das an dem Lloydschen Beispiel demonstrierte Ergebnis kann man leicht auf einem andern Weg nachweisen, indem man nämlich den Lancasterschen Algorithmus auf die Determinanten der Cramerschen Regel anwendet, d.h. zunächst auf die allen Multiplikatoren zugehörige Koeffizientendeterminante:

a)

$$\det = \begin{vmatrix} + & + & - \\ + & - & - \\ + & 0 & - \end{vmatrix}$$

1.

$$\begin{matrix} oo1 & a \\ o11 & b \\ oz1 & c \end{matrix} \qquad \begin{matrix} ooo & a' \\ o1o & b' \end{matrix}$$

2. LISTE

$$\begin{matrix} ooo \\ oo1 & c \\ o1o \\ o11 & c \end{matrix}$$

3. L

$$\begin{matrix} ooo & a' \\ o1o & b'. \end{matrix}$$

Auch hier kann man erkennen, daß die Veränderung des dritten Elements in a und b, d.h. die Umkehrung des Vorzeichens dieser beiden Elemente zu einem eindeutigen Vorzeichen der Determinante führt, weil durch a' und b' alle Zeilen aus L getilgt werden. Da das Produkt der Diagonalelemente ein positives Vorzeichen aufweist und bei dem eindeutigen Vorzeichen von det alle Produkte das gleiche Vorzeichen aufweisen müssen, würde gelten

$$\text{sign det} = (+).$$

Aus eben diesem Grunde ist es auch auf den ersten Blick zu erkennen, daß ein numerisch genügend großes S_p^h und/oder L_p das Vorzeichen der Determinante umkehren kann, dann also gilt

$$\text{sign det} = (-).$$

b) $dX/dG = det1/det$, wobei

$$det1 = \begin{vmatrix} + & + & - \\ 0 & - & - \\ 0 & 0 & - \end{vmatrix}$$

Hier sieht man schon ohne Anwendung des Verfahrens, daß sign det1 = (+)(-)(-) = (+), so daß

$$dX/dG = \frac{(+)}{(-)} < 0.$$

c) $di/dG = det2/det$, wobei

$$det2 = \begin{vmatrix} + & + & - \\ + & 0 & - \\ + & 0 & - \end{vmatrix}$$

1. o11 a
   oz1 b ozo b'
   oz1 c

2. LISTE ooo
   oo1 c
   o1o
   o11 c

3. L ooo b'
   o1o b'

Die Umkehrung des Vorzeichens des dritten Elements in b (zu b') würde zu dem eindeutigen Vorzeichen

$$\text{sign det2} = (+)$$

führen. Daraus folgt, daß bei genügend großem L_p

$$\text{sign det2} = (-).$$

Wir finden hier unsere Aussage bestätigt, daß L_p in der Zähler- und der Nennerdeterminante von di/dG vorkommt:

$$di/dG = \frac{(-)}{(-)} > 0.$$

d) $dp/dG = det3/det$, wobei

$$det3 = \begin{vmatrix} + & + & + \\ + & - & 0 \\ + & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Auch hier erkennt man unmittelbar, daß

$$\text{sign det3} = -(+)(-)(+) = (+),$$

so daß $dp/dG = \frac{(+)}{(-)} < 0.$

Der Multiplikatorvektor hat also folgendes Vorzeichenbild:

$$\text{sign } (dX/dG, di/dG, dp/dG) = (- + -).$$

Die Überlegungen, die zur Ermittlung des Vorzeichenbildes des Multiplikatorvektors im Falle einer Veränderung von M^a führen, sind analog, so daß wir auf die Darstellung hier verzichten.

Zusammenfassend können wir feststellen:
Die Einwände der Kritiker sind zum Teil berechtigt, d.h. der Lancastersche Algorithmus liefert nicht in allen Fällen unmittelbar die in einem System vorhandenen komparativ-statischen Informationen. Wir haben jedoch zu zeigen versucht, daß die Kritiker zu Unrecht daraus den Schluß ziehen, nur die herkömmlichen Lösungstechniken führten zu den gewünschten Ergebnissen, und zwar aus folgenden Gründen:

1. Mit einigen Ergänzungen (Bildung von Linearkombinationen verschiedener Zeilen der Koeffizientenmatrix nach einfachen Regeln auch in den Fällen, in denen keine quantitativen Informationen vorliegen) erweist sich das Verfahren als brauchbar.

2. Die Aussagefähigkeit der aus dem Verfahren erhaltenen Lösungsmenge kann so erweitert werden, daß auch im Falle eines nicht vorzeichenlösbaren Systems auf einfache Art der ökonomische Grund für die Mehrdeutigkeit erkennbar ist, die quantitativen Informationen nicht verloren gehen und die Wirkung von Vorzeichenänderungen der Koeffizienten ermittelt werden kann.

Das Lancastersche Verfahren ist also eine wertvolle Ergänzung der bisherigen Lösungsmethoden, wenn es auch die konventionellen Techniken insofern nicht völlig ersetzen kann, als bei bestimmten Modelltypen[1] ebenfalls ein gewisser Rechenaufwand[2] zur Auffindung der Lösung mit Hilfe des Algorithmus erforderlich ist.

---

1) Modelle, deren Koeffizientenmatrizen Untermatrizen aufweisen, die Zeilen bzw. Spalten mit identischen partiellen Ableitungen enthalten.

2) der im allgemeinen aber geringer sein wird als der Rechenaufwand bei der Anwendung der herkömmlichen Verfahren. Vgl. auch Abschnitt 3.3.

3.2 Standardformen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Frage, ob sich die Koeffizientenmatrix der Systeme, deren Vorzeichenbild zu einem eindeutigen Vorzeichenbild des Lösungsvektors führen, in eine 'typische Form' bringen lassen und welches Vorzeichenbild des Lösungsvektors zu dieser 'typischen Form' gehört.
Wir können an die Behandlung dieser Frage zweierlei Erwartungen knüpfen:
a) Wenn sich typische Formen von Vorzeichenmatrizen ermitteln lassen, die uns Auskunft darüber geben, ob das Vorzeichenbild des dazugehörigen Multiplikatorvektors eindeutig bestimmt ist und welches die eindeutig bestimmten Vorzeichen sind, dann kann die Auffindung der 'typischen Form' als weiteres Lösungsverfahren dienen.
b) Die Erstellung einer'typischen Form' ist aber mehr als ein verfahrenstechnischer Schritt[1]. Wenn die Form einer Koeffizientenmatrix 'typisch' sein soll, so muß sie nicht nur Aussagen darüber liefern, ob ein komparativ-statisches System vorzeichenlösbar ist, sondern auch Hinweise dafür liefern, warum es vorzeichenlösbar ist. Denn das Vorzeichenbild des Multiplikatorvektors ist ja das Ergebnis der Art des Zusammenhangs zwischen den endogenen Variablen und der Wirkungsbeziehungen zwischen den endogenen und den exogenen Variablen. Eine 'typische Form' ordnet eben diesen Zusammenhang durch einen charakteristischen Aufbau der Koeffizientenmatrix (Lancastersche, Gormansche und zerlegbare Form) oder direkt durch die Beschreibung des Zusammenhangs der Variablen über die Koeffizienten (Form der Ketten und Zyklen). Nichts anderes tun wir aber auch, wenn wir die Kausalordnung statischer Systeme untersuchen,

---

1) Vgl. zum folgenden Abschnitt 2.2, bes. S. 2o - 23 und Abschnitt 3., S. 31 - 33.

so daß wir erwarten dürfen, mit der Beschreibung des typischen Vorzeichenbildes eines vorzeichenlösbaren komparativ-statischen Systems auch Aussagen über die Kausalordnung machen zu können.

Wir werden zunächst die Lancastersche Standardform darstellen (Abschnitt 3.2.1), dabei ein vereinfachtes Verfahren zu ihrer Auffindung vorschlagen (Abschnitt 3.2.1.2) und prüfen, wie sich das typische Vorzeichenbild verändert, wenn der Zusammenhang zwischen den Variablen durch die Einführung zusätzlicher Nullen aufgelockert wird (Abschnitt 3.2.1.4).
Der Unterschied zwischen der Kausalordnung der Lancasterschen Standardform (Abschnitt 3.2.3.3) und der Kausalordnung der Gormanschen Form (Abschnitt 3.2.3.3) liegt im wesentlichen darin, daß die Lancastersche Standardform auch rekursive komparativ-statische Systeme umfaßt, während die Gormansche Form nur blockrekursive und - wie auch die Lancastersche Form - in einem Spezialfall integrierte Systeme enthält.
Die Form der Ketten und Zyklen (Abschnitt 3.2.4) kann auch als analytische Beschreibung der grafischen Darstellung der Kausalordnung vorzeichenlösbarer Systeme aufgefaßt werden (Abschnitt 3.2.5).

3.2.1 Die Lancastersche Standardform

LANCASTER (1962) hat als erster den Versuch gemacht, charakteristische Eigenschaften eines Gleichungssystems ausfindig zu machen, das vollständig vorzeichenlösbar ist. Ausgangspunkt ist ein Gleichungssystem mit n Gleichungen und (n+1) Variablen, wobei wir für die folgende Analyse jedoch nicht festzulegen brauchen, welche der Variablen die exogene Variable ist, so daß wir schreiben:

$$(13) \quad f^i(x') = 0, \qquad i = 1,\ldots,n$$

$$x' = (x_1,\ldots,x_{n+1})$$

und (14) $$Az = 0,$$

wobei

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n+1} \end{vmatrix}$$

$$a_{ij} = \frac{\delta f^i(x^{o\prime})}{\delta x_j} \qquad \begin{matrix} i = 1,\ldots,n \\ j = 1,\ldots,n+1 \end{matrix}$$

$$z' = (dx_1,\ldots,dx_{n+1}).$$

3.2.1.1 Das Theorem

Lancaster war der Meinung, daß die Bedingungen, die er für die vollständige Vorzeichenlösbarkeit des Systems (14) herleitete, nicht bloß hinreichend, sondern auch notwendig seien. Gorman[1] hat durch ein Gegenbeispiel nachgewiesen, daß dies jedoch nicht der Fall ist, so daß das Lancastersche Theorem nun lautet:[2]

> Hinreichend dafür, daß aus der Vorzeichenmatrix des Systems Az = 0 ein eindeutiges Vorzeichenbild des Vektors z hergeleitet werden kann, ist, daß die Vorzeichenmatrix durch erlaubte Operationen in die Form $\bar{A}\bar{z} = 0$ gebracht werden kann, wobei $\bar{A}$ charakterisiert ist durch
>
> $$\text{sign } a_{ij} = (-) \text{ für } i = j$$
> $$\text{sign } a_{ij} = (0) \text{ für } i \geq j+1$$
> $$\text{sign } a_{ij} = (+) \text{ für } i \leq j-1$$
>
> (Lancastersche Standardform)
>
> und $\bar{z}$ durch Vorzeichenänderung aus z hervorgeht. Zu den erlaubten Operationen gehören folgende:

---

1) GORMAN (1964); vgl. Abschnitt 3.2.2, S. 83 ff.

2) LANCASTER (1962), Theorem V, S. 121 f.

a) Vertauschen von Zeilen und/oder Spalten. Durch diese Operationen wird nur entweder die Reihenfolge der Variablen oder der Gleichungen geändert.

b) Multiplikation der Zeilen und/oder Spalten mit (-1). Durch die Multiplikation einer Zeile mit (-1) ändert sich die Gleichung $\sum_j a_{ij}z_j = 0$ nicht. Durch die Multiplikation einer Spalte j mit (-1) ändert sich das Vorzeichen von z_j im Lösungsvektor.

Das Verhältnis zweier Elemente (z_i/z_j) im Lösungsvektor z eines durch diese erlaubten Operationen in die Lancastersche Standardform gebrachten Systems ist positiv, wenn an keiner der Spalten i oder j oder an beiden Spalten die Operation b vollzogen wurde. Es ist negativ, wenn eine der Spalten mit (-1) multipliziert wurde.

Für n = 5 sieht die Lancastersche Standardform z.B. folgendermaßen aus:

$$\begin{matrix} - & + & + & + & + \\ 0 & - & + & + & + \\ 0 & 0 & - & + & + \\ 0 & 0 & 0 & - & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & - \end{matrix} + \begin{matrix} + \\ + \\ + \\ + \\ + \end{matrix}$$

Zum Beweis des Theorems[1] schreiben wir das System $\bar{A}\bar{z} = 0$ um in $\bar{A}\bar{z} = \bar{y}$, wobei $\bar{A}$ definiert ist durch

$$\begin{aligned} \text{sign } a_{ij} &= (0) \text{ für } i \geq j+2 \\ \text{sign } a_{ij} &= (-) \text{ für } i = j+1 \\ \text{sign } a_{ij} &= (+) \text{ für } i \leq j \ . \end{aligned}$$

z.B.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} + & + & + & + & + \\ - & + & + & + & + \\ 0 & - & + & + & + \\ 0 & 0 & - & + & + \\ 0 & 0 & 0 & - & + \end{bmatrix} \qquad \bar{y} = \begin{bmatrix} + \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

---

1) Vgl. LANCASTER (1962), Theorem III, S. 119.

Wie man, z.B. durch Entwicklung nach der ersten Spalte, erkennen kann, ist das Vorzeichen der Determinante der Matrix $\mathbb{A}$ positiv. Die Kofaktoren der Elemente, die ungleich Null sind, müssen also die gleichen Vorzeichen haben wie diese Elemente. Wie man aus /$\mathbb{A}$/ ableiten kann, enthalten die Kofaktoren der Nullelemente jeweils zwei Zeilen mit (+) Vorzeichen. Ein Vertauschen der beiden Zeilen ändert das Vorzeichen des Kofaktors, nicht aber sein Vorzeichenbild, so daß das Vorzeichen dieses Kofaktors unbestimmt ist. Die Inverse von $\mathbb{A}$ hat also folgendes Vorzeichenbild:

$$\text{sign } \mathbb{A}^{-1} = \begin{bmatrix} + & - & ? & ? & ? \\ + & + & - & ? & ? \\ + & + & + & - & ? \\ + & + & + & + & - \\ + & + & + & + & + \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{z} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{y}.$$

Aus dem Vorzeichenbild von $\mathbb{A}^{-1}$ und $\mathbb{y}$ ergibt sich, daß

$$\text{sign } \mathbb{z} = (+ + + + +),$$

so daß $\text{sign } (\mathbb{z}_i/\mathbb{z}_j) = (+)$.

Dieses Ergebnis kann man auch leicht mit dem Lancasterschen Algorithmus nachweisen. Als Beispiel nehmen wir die Standardform einer 5x6 Koeffizientenmatrix:

```
- + + + + +
0 - + + + +
0 0 - + + +
0 0 0 - + +
0 0 0 0 - +
```

1. o11111 a

zo1111 b	z1oooo f
zzo111 c	zz1ooo g
zzzo11 d	zzz1oo h
zzzzo1 e	zzzz1o i

2. LISTE	oooooo	o1oooo f
	o1 e	o1 e
	1o i	1o i
	11 d	11 d
	1oo h	1oo h
	1o1 e	1o1 e
	11o i	11o i
	111 c	111 c
	1ooo g	1ooo g
	1oo1 e	1oo1 e
	1o1o i	1o1o i
	1o11 d	1o11 d
	11oo h	11oo h
	11o1 e	11o1 e
	111o i	111o i
	1111 b	1111 a
3. L	oooooo	

Daraus folgt, daß alle (z_i/z_j) positiv sind.

3.2.1.2 Ein vereinfachtes Verfahren

Die aufgrund des Lancasterschen Theorems erlaubten Operationen sind vor allem bei größeren Systemen recht zeitraubend. Wir schlagen deshalb zur Auffindung der Standardform ein Verfahren vor, das schneller zum Ziel führt und benutzen als Beispiel folgendes Vorzeichenbild einer Koeffizientenmatrix:

	+	-	0	-	+	+
	0	+	0	-	0	0
	-	-	+	-	+	+
	0	+	0	+	-	+
	0	+	0	+	+	0

I. Schreibe das Vorzeichenbild der Matrix unter Angabe der Variablen[1] und der Zeilennummern (Z)

	dx_1	dx_2	dx_3	dx_4	dx_5	$d\alpha$	Z
	+	-	0	-	+	+	1
	0	+	0	-	0	0	2
I	-	-	+	-	+	+	3
	0	+	0	+	-	+	4
	0	+	0	+	+	0	5

1) Wir wählen die 6. Variable als exogene Variable α.

II. Eine Zeile, die k Nullen enthält, bekommt die Rangnummer R = k+1. Eine Spalte, die k Nullen enthält, bekommt die Rangnummer n-k[1]:

	R	dx_1	dx_2	dx_3	dx_4	dx_5	$d\alpha$	Z
	2	+	[-]	0	-	+	+	1
	5	0	+	0	-	0	0	2
II	1	-	-	[+]	-	+	+	3
	3	0	+	0	+	-	+	4
	4	0	+	0	+	+	0	5
	R	2	5	1	6	4	3	

III. Bilde aus II ein neues Vorzeichenbild durch Ablesen der Rangnummern. So ist z.B. das Element a_{11} des neuen Vorzeichenbildes an der Rangnummer 1 der Zeile und der Rangnummer 1 der Spalte zu erkennen (umrandet): sign a_{11} = (+). Ebenso ist z.B. das Element a_{25} des neuen Vorzeichenbildes an der Rangnummer 2 der Zeile und der Rangnummer 5 der Spalte zu erkennen (ebenfalls umrandet): sign a_{25} = (-). Daraus ergibt sich:

	R	dx_3	dx_1	$d\alpha$	dx_5	dx_2	dx_4	Z
	1	+	-	+	+	-	-	3
	2	0	+	+	+	-	-	1
III	3	0	0	+	-	+	+	4
	4	0	0	0	+	+	+	5
	5	0	0	0	0	+	-	2
	R	1	2	3	4	5	6	

Nun befindet sich III, abgesehen von den Vorzeichen, schon in der Lancasterschen Standardform.

IV. Verwandle III Zeile für Zeile in das der Lancasterschen Standardform entsprechende Vorzeichenbild. Beginne mit der rangersten.

Durch Multiplikation der dritten Zeile (rangersten) und der dritten und vierten Spalte mit (-1) erhalten

1) Da in der Standardform zwei Spalten ohne Nullen vorkommen, erhält eine die Nr. n, die andere die Nr. n+1, welche, das ist gleichgültig.

wir das richtige Vorzeichenbild für die erste Zeile der Standardform:

dx_3	dx_1	$-d\alpha$	$-dx_5$	dx_2	dx_4	Z
-	+	+	+	+	+	-3
0	+	-	-	-	-	1
0	0	-	+	+	+	4
0	0	0	-	+	+	5
0	0	0	0	+	-	2

Man sieht an dem so gewonnenen Vorzeichenbild, daß man in unserem Beispiel nur noch die erste und zweite Zeile (rangzweite und rangfünfte) mit (-1) multiplizieren muß, um auch das Vorzeichenbild der Lancasterschen Standardform zu erhalten:

	dx_3	dx_1	$-d\alpha$	$-dx_5$	dx_2	dx_4	Z
	-	+	+	+	+	+	-3
	0	-	+	+	+	+	-1
IV	0	0	-	+	+	+	4
	0	0	0	-	+	+	5
	0	0	0	0	-	+	-2

V. Der Lösungsvektor steht nun über dem Vorzeichenbild IV:

$$\text{sign}\,(dx_3, dx_1, -d\alpha, -dx_5, dx_2, dx_4) = (+\ +\ +\ +\ +\ +)$$

$$\text{sign}\,\left(\frac{dx_1}{d\alpha}, \frac{dx_2}{d\alpha}, \frac{dx_3}{d\alpha}, \frac{dx_4}{d\alpha}, \frac{dx_5}{d\alpha}\right) = (-\ -\ -\ -\ +)$$

Das Verfahren beruht auf der Überlegung, daß bei einer Matrix, die durch Vertauschen von Zeilen und/oder Spalten in die Lancastersche Standardform gebracht wird, die Zusammensetzung jeder Spalte und Zeile unverändert bleibt, auch wenn sich die Reihenfolge der Elemente ändert.

3.2.1.3 Die Kausalordnung der Form

Wir wollen nun untersuchen, welcher Art die Kausalordnung ist, die der Lancasterschen Standardform zugrundeliegt[1]. Wir benutzen zur Veranschaulichung eine 4x5 Koeffizientenmatrix, die sich in der Lancasterschen Standardform befindet.
Da die Zahl der Variablen größer ist als die Zahl der Gleichungen haben wir es mit einer aufteilbaren Struktur zu tun. Eine Variable ist exogen. Die Struktur eines solchen Systems ist erst darstellbar, wenn die Variablen in endogene und exogene aufgeteilt sind.
Wir können also fünf Fälle unterscheiden, je nachdem, welche der fünf Variablen als exogene Variable angenommen wird[2]:

1. $x_1 = \alpha$

Das Gleichungssystem $A_1 z = 0$ mit dem Vorzeichenbild

dx_2	dx_3	dx_4	dx_5	$d\alpha$
+	+	+	+	-
-	+	+	+	0
0	-	+	+	0
0	0	-	+	0

besteht in diesem Fall nur aus einer einzigen vollständigen Menge, die keine echten vollständigen Untermengen enthält. Wir haben es also mit einer integrierten linearen Struktur zu tun.

2. $x_2 = \alpha$

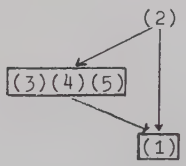
Das Gleichungssystem $A_2 z = 0$ mit dem Vorzeichenbild

1) Vgl. dazu die Abschnitte 2.3 und 2.4 und Abschnitt 3., S. 31 - 33.

2) Die folgenden Vorzeichenbilder entstehen aus der Lancasterschen Standardform, indem wir jeweils eine Spalte als die Koeffizientenspalte der exogenen Variablen betrachten.

dx_1	dx_3	dx_4	dx_5	$d\alpha$
-	+	+	+	+
0	+	+	+	-
0	-	+	+	0
0	0	-	+	0

weist eine andere Struktur auf. Die Gleichungen (2), (3) und (4) des Systems bilden nun eine vollständige Untermenge nullter Ordnung mit den endogenen Variablen dx_3 ,dx_4 und dx_5. Diese sind exogen zur vollständigen Untermenge erster Ordnung, die die endogene Variable dx_1enthält.
Diese Kausalstruktur läßt sich grafisch folgendermaßen darstellen:



Gl. 2,3,4

Gl. 1

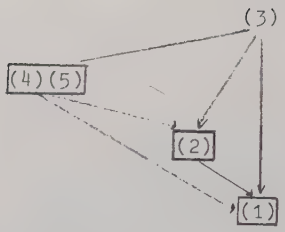
3. $x_3 = \alpha$

Auch das Gleichungssystem $A_3 z = 0$ mit dem Vorzeichenbild

dx_1	dx_2	dx_4	dx_5	$d\alpha$
-	+	+	+	+
0	-	+	+	+
0	0	+	+	-
0	0	-	+	0

besitzt eine Kausalstruktur. Die Gleichungen (3) und (4) stellen eine vollständige Untermenge nullter Ordnung mit den Variablen dx_4 und dx_5 dar. Diese Variablen sind exogen zur vollständigen Untermenge erster Ordnung, die die Gleichung (2) mit der endogenen Variablen dx_2 enthält. Die Variablen dx_2, dx_4 und dx_5 sind exogen zur vollständigen Untermenge zweiter Ordnung, die die Gleichung (1) mit der endogenen Variablen dx_1 enthält. Das Bild der Kausalstruktur sieht

folgendermaßen aus:



Gl. 3,4

Gl. 2

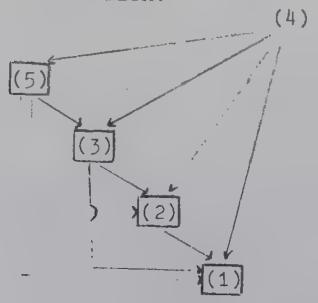
Gl. 1

4. $x_4 = \alpha$

Die Kausalstruktur des Systems $A_4 z = 0$ mit dem Vorzeichenbild

dx_1	dx_2	dx_3	dx_5	$d\alpha$
-	+	+	+	+
0	-	+	+	+
0	0	-	+	+
0	0	0	+	-

enthält mehrere Untermengen. Die Gleichung (4) bildet eine vollständige Untermenge nullter Ordnung mit der endogenen Variablen dx_5, die exogen zur vollständigen Untermenge erster Ordnung ist, die aus Gleichung (3) besteht und die endogene Variable dx_3 enthält. dx_3 und dx_5 sind exogen zur vollständigen Untermenge zweiter Ordnung der Gleichung (2) mit der endogenen Variablen dx_2. dx_2, dx_3 und dx_5 sind exogen zur vollständigen Untermenge dritter Ordnung, die aus Gleichung (1) besteht und die endogene Variable dx_1 enthält. Die Kausalstruktur läßt sich folgendermaßen grafisch darstellen:



Gl. 4

Gl. 3

Gl. 2

Gl. 1

5. $x_5 = \alpha$

In dem System $A_5 z = 0$ mit dem Vorzeichenbild

dx_1	dx_2	dx_3	dx_4	$d\alpha$
-	+	+	+	+
0	-	+	+	+
0	0	-	+	+
0	0	0	-	+

entspricht jede Gleichung einer vollständigen Untermenge. Der Unterschied zu dem vorhergehenden Fall ist nur, daß jetzt in der vollständigen Untermenge nullter Ordnung (Gleichung (4)) nicht dx_5, sondern dx_4 bestimmt wird. Die Kausalstruktur ist sonst genau die gleiche wie im vorhergehenden Fall.

Bis auf den Fall 1 sind alle Matrizen A_j ($j = 2,\ldots,5$) blockdreieckig oder dreieckig.
Die Fälle 2 und 3 sind von der Form

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

wobei im Falle 2

$$A_{11} = \begin{bmatrix} - \end{bmatrix} \qquad A_{12} = \begin{bmatrix} + & + & + \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} + & + & + \\ - & + & + \\ 0 & - & + \end{bmatrix}$$

und im Falle 3

$$A_{11} = \begin{bmatrix} - & + \\ 0 & - \end{bmatrix} \qquad A_{12} = \begin{bmatrix} + & + \\ + & + \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} + & + \\ - & + \end{bmatrix}$$

Der Vektor der exogenen Variablen wird dabei so unterteilt wie die Matrix, wobei $d\alpha^1$ positiv ist und das erste Element von $d\alpha^2$ negativ ist, während die anderen Elemente von $d\alpha^2$ Null sind.
In den Fällen 4 und 5 sind die Matrizen dreieckig.
Wir erhalten also ein integriertes System (A_1), zwei blockrekursive (A_2 und A_3) und zwei rekursive Systeme (A_4 und A_5).

Wir stellen also fest, daß die Lancastersche Standardform in unserem Beispiel unterschiedliche Kausalordnungen darstellen kann, je nachdem, welche der Variablen exogen ist. Diese Kausalordnungen lassen sich wie folgt allgemein beschreiben:
Ist in dem System Az = 0 mit n Gleichungen und n+1 Unbekannten die Variable dx_i (i = 2,...,n) exogen vorgegeben, so werden die Variablen dx_j (j = i+1,... n+1) in der vollständigen Untermenge nullter Ordnung bestimmt, die die Gleichungen i bis n umfaßt. Die Variablen dx_k (k = 1,..., i-1) werden in vollständigen Untermengen bestimmt, die jeweils nur eine Gleichung enthalten, nämlich die k-te Gleichung. Sie stellt eine Untermenge (i-k)-ter Ordnung dar. Die entsprechenden Strukturen sind alle kausal.
Ist z.B. i=6 und n=9, so werden die Variablen dx_7, ..., dx_{10} in der vollständigen Untermenge nullter Ordnung bestimmt, die die Gleichungen (6) bis (9) enthält. Die Variable dx_2 wird z.B. in der vollständigen Untermenge vierter Ordnung bestimmt, die die Gleichung (2) enthält.
Ist die Variable x_1 exogen vorgegeben, so liegt eine integrierte Struktur vor.
Ist die Variable dx_{n+1} exogen vorgegeben, so wird die Variable dx_j (j = 1,...,n) in der vollständigen Untermenge (n-j)-ter Ordnung bestimmt, die aus der Gleichung (j) besteht.

Über die Aufteilbarkeit einer nx(n+1) Matrix in der Lancasterschen Standardform läßt sich folgende Aussage machen:
Ist die erste Variable exogen, so liegt eine integrierte Struktur vor. Das Vorzeichenbild der Matrix der endogenen Variablen entspricht dann dem unten angegebenen Vorzeichenbild von A_{22}.
Ist die i-te Variable (i = 2,...,n-1) exogen, dann ist die Koeffizientenmatrix der endogenen Variablen

blockdreieckig von der Form

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

wobei A_{11} eine dreieckige (i-1)x(i-1) Matrix ist, A_{12} ist eine (i-1)x(n-i+1) Matrix, deren Elemente alle positiv sind und A_{22} ist eine (n-i+1)x(n-i+1) Matrix von der folgenden Form

$$\begin{bmatrix} + & + & \dots & + & + \\ - & + & \dots & + & + \\ 0 & - & \dots & + & + \\ . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & \dots & - & + \end{bmatrix}$$

A_{22} entspricht der vollständigen Untermenge nullter Ordnung und A_{11} und A_{22} entsprechen den vollständigen Untermengen höherer Ordnung. Wird der Vektor der exogenen Variablen α aufgeteilt wie die Matrix, dann ist $d\alpha^1 > 0$ und $d\alpha^2$ hat das Vorzeichenbild (- 0 ... 0).

Ist die Variable n bzw. n+1 exogen, so ist die Matrix der endogenen Variablen dreieckig. Wir haben es dann mit einem rekursiven Modell zu tun, während wir es in allen anderen Fällen mit einem blockrekursiven Modell zu tun haben[1]. Eine Ausnahme bildet der Fall, in dem die erste Variable exogen ist. Dann liegt weder ein rekursives noch ein blockrekursives Modell vor.

3.2.1.4 Zusätzliche Nullelemente

Wie sieht es mit der Vorzeichenlösbarkeit des Systems $\bar{A}\bar{z} = 0$ aus, wenn außer den Elementen unter der Hauptdiagonale auch noch andere Elemente Null sind? Hierzu hat Lancaster folgendes Theorem aufgestellt[2]:

> Die Matrix des Gleichungssystems $Az = 0$[3] befinde sich in der Lancasterschen Standardform, außer

---

1) Vgl. Abschnitt 2.2, S. 14 ff.

2) LANCASTER (1962), S. 122 f.

3) Entspricht Gleichung (14), S. 68

$a_{kk} = 0$. Dann kann das System in zwei Teile zerlegt werden:

$$A_1 z^1 = 0,$$

wobei A_1 eine (k-1)xk Matrix in der Standardform ist und $z^1 = (z_1,\ldots,z_{k-1})$ und

$$A_2 z^2 = 0,$$

wobei A_2 eine (n-k+1)x(n-k+1) nichtsinguläre Matrix ist und $z^2 = (z_k,\ldots,z_{n+1})$. Die Lösung des Systems Az = 0 lautet:

$$\text{sign } z_i = (+) \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, k$$

$$\text{sign } z_i = (0) \quad \text{für} \quad i = k+1, \ldots, n+1.$$

Sehen wir uns eine 5x6 Matrix an, in der das Element $a_{33} = 0$ und die Matrix im übrigen in der Standardform ist:

$$\begin{bmatrix} - & + & + & + & + & + \\ 0 & - & + & + & + & + \\ 0 & 0 & 0 & + & + & + \\ 0 & 0 & 0 & - & + & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & - & + \end{bmatrix}$$

Das Gleichungssystem können wir dann folgendermaßen schreiben:

$$A_1 z^1 + A_3 z^2 = 0$$

$$A_2 z^2 = 0.$$

Da $/A_2/ \neq 0$, ist $z^2 = 0$. Die erste Gleichung reduziert sich deshalb auf

$$A_1 z^1 = 0.$$

Da A_1 in der Standardform ist, ergibt sich:

$$z^1 > 0.$$

Da $z^2 = 0$, spielt es auch keine Rolle, wie das Vorzeichenbild von A_3 aussieht, während A_2 eine eindeutig vorzeichenbestimmte Determinante aufweisen muß. Insofern weicht also das Vorzeichenbild eines auf diese Art zerlegbaren Systems von dem eines nicht zerlegbaren Systems ab.

Bisher haben wir nur untersucht, was sich ändert, wenn eines der Minuszeichen Null wird. Was geschieht, wenn ein Pluszeichen Null wird? Lancaster nimmt an, daß dies keinen Einfluß auf die Vorzeichenbilder hat[1]. Betrachten wir jedoch folgendes Beispiel eines 4x5 Systems:

$$\begin{bmatrix} - & + & + & + & + \\ 0 & - & + & + & + \\ 0 & 0 & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & + \end{bmatrix}$$

In diesem Fall ist die dritte Variable Null ($a_{33}z_3 = 0 \rightarrow z_3 = 0$) und die dritte Spalte von A kann auf und oberhalb der Diagonale ein beliebiges Vorzeichenbild annehmen (wobei allerdings $a_{33} \neq 0$ sein muß). Daraus folgt: Weist ein nx(n+1) Gleichungssystem eine Zeile j auf, in der alle außerdiagonalen Elemente Null sind, während sich nach Streichung der j-ten Zeile und der j-ten Spalte die Restmatrix in der Lancasterschen Standardform befindet, so lautet die Lösung des Systems:

$$\text{sign } z_i = (+) \quad \text{für } i \neq j$$

$$\text{sign } z_j = (0).$$

Wenn nach dem ersten Streichungsprozeß in der Restmatrix wiederum eine Zeile k vorhanden ist, in der alle außerdiagonalen Elemente Null sind, so kann das Verfahren wiederholt werden. Der Lösungsvektor lautet dann

$$\text{sign } z_i = (+) \quad \text{für } i \neq j,k$$

$$\text{sign } z_j = \text{sign } z_k = (0).$$

Wir untersuchen folgendes Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} - & + & + & + & + & 0 \\ 0 & - & + & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & - & + \end{bmatrix}$$

Die vierte Zeile enthält keine außerdiagonalen Elemente,

---

1) LANCASTER (1962), S. 1o6.

die ungleich Null sind. Aus $a_{44}z_4 = 0$ folgt $z_4 = 0$. Nach Streichung der vierten Spalte und Zeile enthält die dritte Zeile der daraus entstehenden Matrix nur Nullelemente außerhalb der Diagonale, also ist $z_3 = 0$. Nach Streichung der dritten Zeile und Spalte enthält die zweite Zeile nur Nullelemente außerhalb der Diagonale, so daß $z_2 = 0$. Nach diesen Streichungsprozessen bleibt folgende Matrix übrig:

$$\begin{bmatrix} - & + & 0 \\ 0 & - & + \end{bmatrix}.$$

Sie entspricht (bis auf ein Nullelement, was aber nichts an dem Vorzeichenbild des Lösungsvektors ändert) der Lancasterschen Standardform, so daß der Lösungsvektor des Gesamtsystems lautet:[1)]

$$\text{sign}\,(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5) \;=\; (+\;0\;0\;0\;+).$$

Das Vorzeichenbild der Matrix A könnte ohne Beeinträchtigung des Vorzeichenbildes des Lösungsvektors folgendermaßen aussehen:

$$A = \begin{bmatrix} - & ? & ? & ? & + & 0 \\ 0 & ? & ? & ? & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ? & ? & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ? & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & - & + \end{bmatrix}.$$

An den Stellen, an denen ein ? auftaucht, kann nach Belieben ein (+) oder ein (-) (bei den außerdiagonalen ? auch Null) stehen.
In diesen Fällen, in denen nicht Minuszeichen, sondern Pluszeichen Null werden, können sich also auch die Vorzeichenbilder ändern.
In beiden Beispielen haben wir es mit zerlegbaren Systemen folgender Art zu tun:
In der System $Az = 0$ ist ein Untersystem A_1z^1 enthalten, dessen Lösungsvektor ein Nullvektor ist, weil die Determinante von A_1 eindeutig vorzeichenbestimmt ist, d.h. $/A_1/ \neq 0$.

---

1) Alle Nullelemente in der Lancasterschen Standardform, die nicht zur Zerlegbarkeit im hier definierten Sinne führen, ändern nichts an demVorzeichenbild des Lösungsvektors.

Im ersten Beispiel ist

$$A_1 = [-] \qquad z^1 = (z_3) \ .$$

Im zweiten Beispiel ist

$$A_1 = \begin{bmatrix} - & + & + \\ 0 & - & + \\ 0 & 0 & - \end{bmatrix} \qquad z^1 = (z_2, z_3, z_4) \ .$$

Die entsprechenden Zeilen und Spalten in A können gestrichen werden und es kann überprüft werden, ob sich die Restmatrix A_2 des Systems $A_2 z^2$ (z^2 enthält alle nicht gestrichenen Variablen) in der Standardform befindet.

Im ersten Beispiel bleibt als Restmatrix

$$A_2 = \begin{bmatrix} - & + & + & + \\ 0 & - & + & + \\ 0 & 0 & - & + \end{bmatrix} \qquad z^2 = (z_1, z_2, z_4)$$

Im zweiten Beispiel ist

$$A_2 = \begin{bmatrix} - & + & 0 \\ 0 & - & + \end{bmatrix} \qquad z^2 = (z_1, z_5) \ .$$

Das Lancastersche Theorem (S. 79 f.) ist also unvollständig, weil es nicht alle Fälle zerlegbarer Systeme umfaßt.
Wenn Pluszeichen in der Standardform Null werden, dann führt dies also nur zu einer Veränderung des Vorzeichenbildes des Lösungsvektors, wenn ein im obigen Sinne zerlegbares System entsteht.

3.2.2 Die Gormansche Form - ein Gegenbeispiel[1)]

Gorman hat gezeigt, daß auch andere typische Formen von Koeffizientenmatrizen vollständig vorzeichenlösbar sind.
Das System (14) Az = 0 (S. 68) besitze folgende Matrix

---

1) GORMAN (1964).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Als Lösung für die Multiplikatoren ergibt sich:

$$dx_1/dx_4 = (-a_{22}/det)(a_{14}a_{33} - a_{13}a_{34})$$

$$dx_2/dx_4 = (a_{21}/det)(a_{14}a_{33} - a_{13}a_{34})$$

$$dx_3/dx_4 = (-a_{34}/det)(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -a_{34}/a_{33} ,$$

wobei

$$det = a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) .$$

Wenn für die Koeffizienten folgende Vorzeichen gelten:

$$a_{11}, a_{12} > 0; \quad a_{13}, a_{14} < 0$$
$$a_{21} > 0; \quad a_{22} < 0$$
$$a_{33} > 0; \quad a_{34} < 0 ,$$

erhalten wir:

$$\text{sign det} = (+)[(+)(-) - (+)(+)] = (-)$$

$$\text{sign } dx_1/dx_4 = (-)(-)(-)[(-)(+) - (-)(-)] = (+)$$

$$\text{sign } dx_2/dx_4 = (-)(+)[(-)(+) - (-)(-)] = (+)$$

$$\text{sign } dx_3/dx_4 = (-)(-)/(+) = (+)$$

Das gleiche Ergebnis können wir leicht mit dem Lancasterschen Algorithmus nachweisen. A hat folgendes Vorzeichenbild:

	+	+	-	-
	+	-	0	0
	0	0	+	-

1.	oo11	a
	o1zz	b
	zzo1	c
	zz1o	d

2.	LISTE	oooo	
		ooo1	c
		oo1o	d
		oo11	a
		o1oo	b
		o1o1	b,c
		o11o	b,d
		o111	b
3.	L	oooo	

Also ist sign $(dx_1, dx_2, dx_3, dx_4) = (+ + + +)$

Das Vorzeichenbild von A führt also zur vollständigen Vorzeichenlösbarkeit, obwohl es nicht dem Lancasterschen Theorem (S. 68 f.) genügt und auch nicht durch erlaubte Operationen (oder durch das von uns vorgeschlagene Verfahren) in die Lancastersche Standardform gebracht werden kann.

3.2.3 Die zerlegbare Standardform

Nach Gorman[1] gehören die beiden dargestellten Standardformen zu der allgemeinen Form zerlegbarer Systeme. Das Gleichungssystem[2] (14) Az = 0 (S. 68) mit n Gleichungen und n+1 Unbekannten ist zerlegbar nach k, wenn

a) genau eine Gleichung vorhanden ist, die Variablen beider Teilsysteme enthält (sonst handelt es sich nicht um ein einziges Gleichungssystem),

b) jede andere Gleichung (eine Gleichung muß mindestens zwei Variablen enthalten) eine Beziehung entweder zwischen den Variablen $z_1, \ldots, z_k$ oder zwischen den Variablen $z_{k+1}, \ldots, z_{n+1}$ aufweist, aber keine dieser Gleichungen z_i mit z_j verbindet, wobei $i \leq k$ und $j \geq k+1$.

So ist z.B. das System, das der Lancasterschen Standardform entspricht, zerlegbar, indem man z_1 von $z_2, \ldots, z_{n+1}$ trennt, dann z_2 von $z_3, \ldots, z_{n+1}$, usw.,

---

1) GORMAN (1964), S. 66.

2) Der Rest dieses Abschnitts und der nächste sind die Lancastersche Fassung der Gormanschen Gedanken: LANCASTER (1964), S. 69 ff. Vgl. auch QUIRK/SAPOSNIK (1968), S. 2o3 f.

während im Gormanschen Beispiel das System in die Gleichung mit den Variablen z_1, z_2 und die Gleichung mit den Variablen z_3, z_4 zerlegt werden kann.

Die Matrix A eines zerlegbaren Gleichungssystems $Az = 0$ kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ A_1 & 0_1 \\ 0_2 & A_2 \end{bmatrix},$$

wobei der Vektor a_1 die ersten k Spalten des Systems enthält und der Vektor a_2 die übrigen (n+1-k) Spalten. A_1 ist die (k-1)xk Matrix der Variablen $z_1, \ldots, z_k$, A_2 die (n-k)x(n+1-k) Matrix der Variablen $z_{k+1}, \ldots, z_{n+1}$. 0_1, 0_2 sind Nullmatrizen der Ordnung (k-1)x(n+1-k) bzw. (n-k)xk.

$Az = 0$ kann deshalb auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} a_1 z^1 + a_2 z^2 &= 0 \\ A_1 z^1 &= 0 \\ A_2 z^2 &= 0 \quad . \end{aligned}$$

3.2.3.1 Das Vorzeichenbild der zerlegbaren Form

Nehmen wir an, die Vorzeichenbilder von A_1 und A_2 seien so beschaffen, daß $A_1 z^1 = 0$ und $A_2 z^2 = 0$ eine qualitative Lösung haben, wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können, die Elemente der Vektoren z^1 und z^2 seien positiv. Dann wird die qualitative Lösung $z > 0$ das Gleichungssystem dann und nur dann erfüllen, wenn a_1 nur nichtnegative (bzw. nur nichtpositive) Elemente und der Vektor a_2 nur nichtpositive (bzw. nur nichtnegative) Elemente enthält und in beiden Vektoren mindestens ein Element ungleich Null ist. A_1 und A_2 besitzen eine qualitative Lösung, weil sie selbst im Sinne der obigen Definition zerlegbar sind,

bis nur noch Reihen mit einem einzigen negativen und positiven Element übrig bleiben. Daraus ergibt sich folgendes Theorem:

Das nx(n+1) Gleichungssystem Az = O ist vollständig vorzeichenlösbar, wenn die Matrix A in die zerlegbare Form gebracht werden kann. Die zerlegbare Form

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ A_1 & O_1 \\ O_2 & A_2 \end{bmatrix}$$

hat folgende Eigenschaften:

a_1 ist ein nichtpositiver 1xk Vektor, der ungleich Null ist,

a_2 ist ein nichtnegativer 1x(n+1-k) Vektor, der ungleich Null ist,

A_1 ist eine (k-1)xk Matrix in der zerlegbaren Form,

A_2 ist eine (n-k)x(n+1-k) Matrix in der zerlegbaren Form,

O_1 ist eine (k-1)x(n+1-k) Nullmatrix,

O_2 ist eine (n-k)xk Nullmatrix.

3.2.3.2 Beispiele [1)]

Wenn n = 1, muß das Vorzeichenbild des Koeffizientenvektors immer entgegengesetzte Vorzeichen aufweisen, damit der Multiplikator positiv ist. Im Falle eines 2x3 Gleichungssystems sind die Lancastersche und die Gormansche Form identisch. Bei einem 3x4 Gleichungssystem unterscheiden sich die Gormansche und die Lancastersche Form. Auf jeden Fall gibt es immer nur eine Lancastersche Form, während es bei größeren Systemen (n > 3) mehrere Gormansche Formen gibt, darunter auch solche, bei denen die Matrix A_1 und/oder die Matrix A_2 sich in der Lancasterschen Standardform befindet. So gibt es z.B. in einem 4x5 Gleichungssystem die folgenden beiden Gormanschen Formen:

---

1) Bei den folgenden Beispielen wählen wir immer solche Vorzeichenbilder aus, die die geringste Anzahl von Nullen enthalten.

a) bei k = 1 ist

a_1 ein nichtpositiver 1x1 Vektor

a_2 ein nichtnegativer 1x4 Vektor

A_1 ist eine 0x1 Matrix

O_1 ist eine 0x4 Matrix

O_2 ein 3x1 Nullvektor

A_2 eine 3x4 Matrix in der Gormanschen Form.

Das Vorzeichenbild sieht folgendermaßen aus:

		1	2	3	4	5
	1	-	+	+	+	+
I	2	0	-	-	+	+
	3	0	-	+	0	0
	4	0	0	0	-	+

b) bei k = 2 ist

a_1 ein nichtpositiver 1x2 Vektor

a_2 ein nichtnegativer 1x3 Vektor

A_1 ein 1x2 Vektor mit dem Vorzeichenbild (- +)

O_1 ein 1x3 Nullvektor

O_2 eine 2x2 Nullmatrix

A_2 eine 2x3 Matrix in der Gormanschen (= Lancasterschen Form.

Die Matrix hat also folgendes Vorzeichenbild

		1	2	3	4	5
	1	-	-	+	+	+
II	2	-	+	0	0	0
	3	0	0	-	+	+
	4	0	0	0	-	+

Die Form II kann nicht durch Vertauschen von Spalten und/oder Zeilen und/oder durch Multiplikation von Spalten und/oder Zeilen mit (-1) in die Form I gebracht werden. Aber bei k = 3,4 erhalten wir Vorzeichenbilder, die durch diese Operationen in die Form I bzw. II gebracht werden können, so daß bei einem 4x5 System

nur zwei unterschiedliche Gormansche Formen existieren. Bei der Lancasterschen Standardform eines 4x5 Systems setzt sich die zerlegbare Form wie folgt zusammen:

a_1 ist ein nichtpositiver 1x1 Vektor

a_2 ist ein nichtnegativer 1x4 Vektor

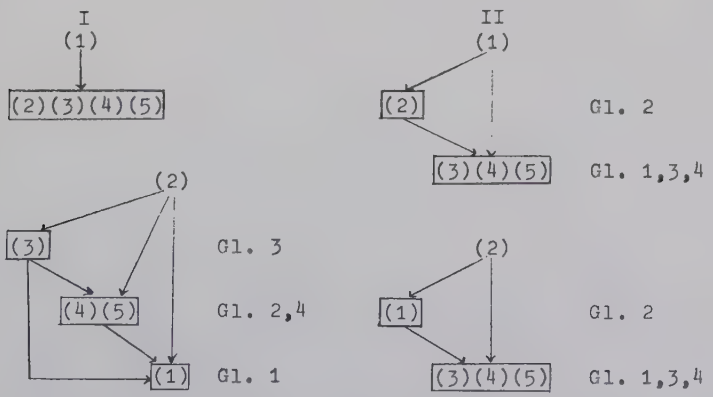
A_1 und O_1 sind OxO Matrizen

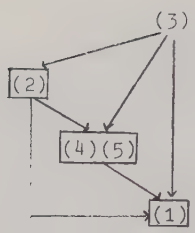
O_2 ist eine 3x1 Nullmatrix

A_2 ist eine 3x4 Matrix in der Lancasterschen Standardform.

3.2.3.3 Die Kausalordnung der zerlegbaren Form

Da wir in Abschnitt 3.2.1.3 die Kausalordnung der Lancasterschen Standardform schon untersucht haben, bleibt uns hier nur noch übrig, die Kausalordnung der Gormanschen Form zu beschreiben. Wir verwenden als Beispiel auch hier zunächst ein 4x5 Gleichungssystem und erhalten für die beiden Gormanschen Formen, die wir im vorhergehenden Abschnitt dargestellt haben, folgende Kausalordnungen (die als exogen angenommenen Variablen sind nicht umrandet):

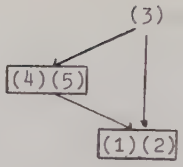




Gl. 3

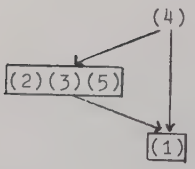
Gl. 2,4

Gl. 1



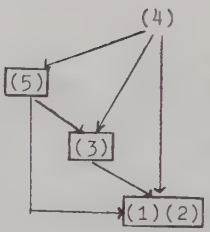
Gl. 3,4

Gl. 1,2



Gl. 2,3,4

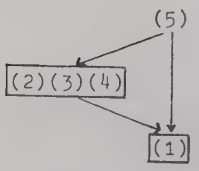
Gl. 1



Gl. 4

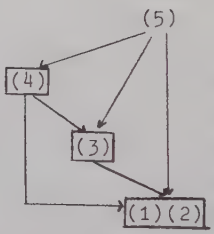
Gl. 3

Gl. 1,2



Gl. 2,3,4

Gl. 1



Gl. 4

Gl. 3

Gl. 1,2

Allgemein haben wir es bei der Gormanschen Form mit Kausalordnungen zu tun, die im Gegensatz zu den Kausalordnungen der Lancasterschen Standardform nicht nur in der vollständigen Untermenge nullter Ordnung mehrere Gleichungen enthalten können.
Das typische Kennzeichen tritt auch hier wie bei der Lancasterschen Standardform auf. Wir haben es mit Kausalketten bzw. Quasi-Kausalketten zu tun, d.h. alle Variablen, die in der vollständigen Untermenge k-ter Ordnung enthalten sind, sind exogen zu allen vollständigen Untermengen höherer Ordnung. Es gibt immer nur eine Untermenge einer bestimmten Ordnung[1].

1) Auch hier gibt es einen Fall, in dem eine integrierte Struktur vorliegt, nämlich dann, wenn die erste Variable in der Gormanschen Form I exogen ist. Allgemein entspricht die Matrix der endogenen Variablen immer dann einer integrierten Struktur, wenn der Vektor der exogenen Variablen außer dem ersten Element, das negativ ist, nur Nullelemente aufweist.

Bei der Lancasterschen Standardform gibt es zwei Kausalordnungen - nämlich diejenigen, bei denen die n-te bzw. (n+1)-te Variable als exogen betrachtet werden -, bei denen in jeder vollständigen Untermenge nur eine einzige Gleichung enthalten ist. Eine solche **Kausalordnung** kann bei der Gormanschen Form nicht existieren, da es deren typisches Kennzeichen ist, daß mindestens in einer Untermenge mehrere Variablen bestimmt werden.

Dementsprechend läßt sich auch die Matrix der endogenen Variablen, die sich (einschließlich des Vektors der exogenen Variablen) in die Gormansche Form bringen läßt, nicht so einfach aufteilen wie die entsprechende Matrix der Lancasterschen Form. Vielmehr sind die aufgeteilten Matrizen von der Form

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ 0 & 0 & \cdots & A_{3k} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & A_{kk} \end{bmatrix},$$

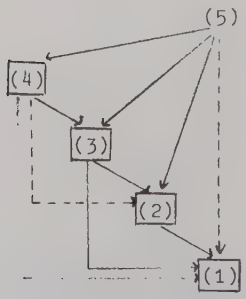
wobei sich - anders als bei der Lancasterschen Standardform - auf der Diagonalen durchaus dreieckige mit anderen Matrizen abwechseln können. Auf keinen Fall kann die Matrix der endogenen Variablen bei der Gormanschen Form dreieckig sein, weil das bei der Lancasterschen Form der Fall ist, wenn die Variable x_n bzw. x_{n+1} exogen vorgegeben ist.

Tauchen in der Lancasterschen oder in der Gormanschen Form zusätzliche Nullelemente auf, die allerdings nicht dazu führen, daß aus dem System ein Untersystem ausgegliedert werden kann, das k Variable und k Gleichungen umfaßt, dann führt dies zu Unterbrechungen der Kausalordnung an den entsprechenden Stellen und u.U. auch dazu, daß mehrere vollständige Untermengen der gleichen Ordnung

entstehen. Wir erläutern für jede Form ein Beispiel. Die Kausalordnung der Lancasterschen Standardform

1	2	3	4	5
-	+	+	+	0
0	-	+	0	+
0	0	-	+	+
0	0	0	-	+

sieht - unter der Annahme, daß die fünfte Variable exogen vorgegeben ist - folgendermaßen aus:



Gl. 4

Gl. 3

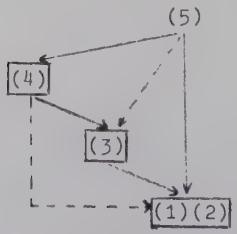
Gl. 2

Gl. 1

Der Gormanschen Form

1	2	3	4	5
-	-	+	0	+
-	+	0	0	0
0	0	-	+	0
0	0	0	-	+

entspricht die folgende Kausalordnung:



Gl. 4

Gl. 3

Gl. 1,2

Die punktierten Pfeile in dem ersten Schaubild entsprechen den zusätzlichen Nullelementen a_{15} und a_{24}. Die punktierten Pfeile in der zweiten Abbildung entsprechen den zusätzlichen Nullelementen a_{14} und a_{35}.

3.2.4 Ketten und Zyklen

Die bisherigen Formen erklärten die typischen Vorzeichenbilder komparativ-statischer Systeme mit Hilfe des Aufbaus der dazugehörigen Koeffizientenmatrizen. Im folgenden wird eine Form dargestellt, die den Zusammenhang zwischen den Variablen auf eine andere Art und Weise erklärt, nämlich mit Hilfe von Ketten und Zyklen, die aus den Koeffizienten gebildet werden können. Zunächst werden wir einige Begriffe definieren (Abschnitt 3.2.4.1), Determinanten, Kofaktoren und die Inverse einer Matrix mit diesen Begriffen analysieren (Abschnitte 3.2.4.2 und 3.2.4.3) und dann erst in der Lage sein, mit diesem Instrumentarium ein Theorem über vollständig vorzeichenlösbare komparativ-statische Systeme darzustellen (Abschnitt 3.2.4.4). In Abschnitt 3.2.4.5 werden wir die Anwendungsmöglichkeiten dieses Theorems prüfen und die Form der Ketten und Zyklen mit anderen Formen vergleichen.

3.2.4.1 Definitionen[1)]

Zur Darstellung des nächsten vorzeichenlösbaren Systems benötigen wir folgende Definitionen:

Definition 1: Wenn $A = [a_{ij}]_1^n$ und $C = [c_{ij}]_1^n$, definieren wir sign $A = [\text{sign } a_{ij}]_1^n$ und $Q_A = \{C: \text{sign } C = \text{sign } A\}$. Q_A ist also eine äquivalente Klasse von Matrizen, die wir bisher als qualitative Matrix bezeichnet haben. Wenn $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$, definieren wir sign $x = (\text{sign } x_1, \ldots, \text{sign } x_n)$ und $Q_x = \{y: \text{sign } y = \text{sign } x\}$. Q_x nennen wir einen qualitativen Vektor.

---

1) BASSET/MAYBEE/QUIRK (1968), S. 456. Vgl. auch HABIBAGAHI (1968), S. 15 - 19.

Definition 2: Q_A hat eine vorzeichenbestimmte Inverse, wenn für alle $C \in Q_A$ folgt, daß $C^{-1} \in Q_{A^{-1}}$, d.h. wenn jede Matrix mit dem Vorzeichenbild von A eine Inverse mit dem Vorzeichenbild von A^{-1} hat.

Definition 3: Eine Kette in A von i_1 bis i_r ist ein Produkt der Form $a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_{r-1}} a_{i_r}$, wobei $i_1, \ldots, i_r$ unterschiedliche Indizes sind. Die Länge der Kette ist die Zahl der Elemente in dem Produkt, hier also (r-1). Alle nichtdiagonalen Elemente sind Ketten der Länge 1.

Definition 4: Ein Zyklus der Länge r in A ist ein Produkt der Form $a(i\text{-}j)a_{ji}$, wenn a(i-j) eine Kette der Länge (r-1) von i bis j ($i \neq j$) ist. Alle Diagonalelemente sind Zyklen der Länge 1.

Definition 5: Eine Matrix A heißt nicht zerlegbar, wenn für jedes $i \neq j$ in A eine Kette $a(i\text{-}j) \neq 0$ existiert.[1)]

3.2.4.2 Determinanten und Kofaktoren[2)]

$\Theta_{r,n}$ bezeichne die Menge aller zunehmenden Mengen $J = (j_1, \ldots, j_r)$ von unterschiedlichen Indizes, die aus den ersten n ganzen Zahlen gebildet werden.

Beispiel: n = 4

$\Theta_{0,4} = \emptyset$

$\Theta_{1,4} = ((1),(2),(3),(4))$

$\Theta_{2,4} = ((1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)$

$\Theta_{3,4} = ((1,2,3),(1,2,4),(2,3,4))$

$\Theta_{4,4} = ((1,2,3,4))$.

J' oder $(j_1, \ldots, j_r)'$ bezeichne das Komplement der Menge J.

---

1) Diese Definition entspricht der herkömmlichen Definition der Nichtzerlegbarkeit. Vgl. QUIRK/RUPPERT (1965), S. 318.

2) BASSET/MAYBEE/QUIRK (1968), S. 547 f.

Beispiele für Komplemente bei n = 4:

$\Theta_{0,4}$: J = Ø J' = (1,2,3,4)

$\Theta_{1,4}$: J = (2) J' = (1,3,4)

$\Theta_{2,4}$: J = (3,4) J' = (1,2)

$\Theta_{3,4}$: J = (2,3,4) J' = (1)

$\Theta_{4,4}$: J = (1,2,3,4) J' = Ø

Bei gegebenem $J \in \Theta_{r,n}$ bezeichnen wir mit $\Theta_{p,J}$ die Menge der zunehmenden Mengen $K = (k_1,\ldots,k_p)$ von unterschiedlichen Indizes in der gegebenen Menge J.
Beispiel: J = (1,2,4)

$\Theta_{0,J} = \emptyset$

$\Theta_{1,J} = ((1),(2),(4))$

$\Theta_{2,J} = ((1,2),(1,4),(2,4))$

$\Theta_{3,J} = ((1,2,4))$

Es gilt $\Theta_{p,J} \in \Theta_{p,n}$.

Mit A(J) benennen wir die Untermatrix mit den Indizes in den Reihen und Spalten, die durch J angegeben werden. d(A(J)) ist die entsprechende Determinante, $A_{(J)}$ die Summe aller Zyklen der Länge r in A(J).

Zyklen und Hauptminoren einer Matrix werden durch folgende Formel mit ihrer Determinante verbunden:
Bei gegebenem $J = \Theta_{n-1,n}$ gilt

$$(15)\quad d(A) = a_{J',J}\,d(A(J)) + \sum_{r=0}^{n-2} (-1)^{n+1-r} \sum_{K \in \Theta_{r,J}} d(A(K))A_{(K')}$$

wobei d(A(Ø)) = 1.

Beispiel: n = 4

$\Theta_{n-1,n} = \Theta_{3,4} = ((1,2,3), (1,2,4), (2,3,4))$

Wir wählen J = (1,2,4) und J' = (3).

$\Theta_{0,J} = \emptyset$; K' = ((1,2,3,4))

$\Theta_{1,J} = ((1),(2),(4))$; K' = ((2,3,4),(1,3,4),(1,2,3))

$\Theta_{2,J} = ((1,2),(1,4),(2,4))$; K' = ((3,4),(2,3),(1,3))

$\Theta_{3,J} = ((1,2,4))$; K' = (3)

$$d(A) = a_{33}d(A(1,2,4)) + \sum_{r=o}^{2}(-1)^{5-r}\sum_{K\in\Theta_{r,(1,2,4)}} d(A(K))A_{(K')}$$

$$= a_{33}d(A(1,2,4))$$
$$+(-1)^5(d(A(\emptyset)))A_{(1,2,3,4)}$$
$$+(-1)^4(d(A(1))A_{(2,3,4)} + d(A(2))A_{(1,3,4)}$$
$$+ d(A(4))A_{(1,2,3)})$$
$$+(-1)^3(d(A(1,2))A_{(3,4)} + d(A(1,4))A_{(2,3)}$$
$$+ d(A(2,4))A_{(1,3)})$$

$$d(A) = a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$- (a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} + a_{12}a_{24}a_{43}a_{31}$$
$$+ a_{13}a_{32}a_{24}a_{41} + a_{13}a_{34}a_{42}a_{21}$$
$$+ a_{14}a_{42}a_{23}a_{31} + a_{14}a_{43}a_{32}a_{21})$$
$$+ (a_{11}(a_{23}a_{34}a_{42} + a_{24}a_{43}a_{32})$$
$$+ a_{22}(a_{13}a_{34}a_{41} + a_{14}a_{43}a_{31})$$
$$+ a_{44}(a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}))$$
$$- ((a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{34}a_{43}$$
$$+(a_{11}a_{44} - a_{14}a_{41})a_{23}a_{32}$$
$$+(a_{22}a_{44} - a_{24}a_{42})a_{13}a_{31})$$

Durch weitere Entwicklung läßt sich unmittelbar herleiten, daß d(A) der Definition von /A/ entspricht. Für die Kofaktoren der Elemente a_{jk} der Matrix A gilt folgende Formel

(16) $$A_{jk} = -(a_{kj}d(A(jk)) + \sum_{r=o}^{n-3}(-1)^{n-r}\sum_{J\in\Theta_{r,(jk)'}} d(A(J))A(j/k)_{(J')})$$

Hierbei ist A(jk) die Hauptuntermatrix, die die Reihen und Spalten k und j nicht enthält. A(j/k) ist die Untermatrix, die die Reihe j und die k-te Spalte nicht enthält.
Die Zyklen von A(j/k) sind alle Ketten von A in der Form a(k-j). $A(j/k)_{(J')}$ ist also die Summe aller Ketten a(k-j) der Länge n-r-1. Man sieht, daß die Ketten in der Formel (16) dieselbe Rolle spielen wie die Zyklen in (15).
A_{13} wird z.B. folgendermaßen berechnet:

$$A_{13} = -a_{31}d(A(13))$$

$$- \sum_{r=o}^{1} (-1)^{4-r} \sum_{J \in \Theta_{r,(2,4)}} d(A(J))A(1/3)_{(J')}$$

$$A_{13} = -a_{31}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$-(-1)^4(d(A(\emptyset))A(1/3)_{(1,2,3,4)})$$

$$-(-1)^3(d(A(2))A(1/3)_{(1,3,4)}$$

$$+d(A(4))A(1/3)_{(1,2,3)})$$

$$A_{13} = -a_{31}(a_{22}a_{44} - a_{24}a_{42})$$

$$- A(1/3)_{(1,2,3,4)}$$

$$+ a_{22}A(1/3)_{(1,3,4)}$$

$$+ a_{44}A(1/3)_{(1,2,3)}$$

a) $A(1/3)_{(1,2,3,4)}$

Hier werden die Ketten der Länge 3 aus A gebildet, die nicht den Zeilenindex 1 und den Spaltenindex 3 tragen. Man nimmt also die Zyklen der Länge 4 aus A und streicht die weg, die mehr als zwei unerlaubte Elemente aufweisen. Dann bleiben

$$a_{13}a_{32}a_{24}a_{41} \quad \text{und}$$

$$a_{13}a_{34}a_{42}a_{21} .$$

Daraus entfernt man jeweils das unerlaubte Element a_{13} und erhält:

$$A(1/3)_{(1,2,3,4)} = a_{32}a_{24}a_{41} + a_{34}a_{42}a_{21}.$$

b) $A(1/3)_{(1,3,4)}$

Hier dürfen die Ketten der Länge zwei folgende Indizes nicht aufweisen:

Zeilen: 1 Spalten: 3 wie vorher
2 2 weil J' = 1,3,4

Dann bilden wir eine Kette aus

Zeilen: 3 Spalten: 1
4 4 $a_{34}a_{41}$

$$A(1/3)_{(1,3,4)} = a_{34}a_{41}.$$

c) $A(1/3)_{(1,2,3)}$

Folgende Indizes sind nicht erlaubt:

Zeilen: 1 Spalten: 3 wie vorher
4 4 weil J' = 1,2,3

Deshalb bilden wir eine Kette aus

Zeilen: 2 Spalten: 1
3 2 $a_{32}a_{21}$

$$A(1/3) = a_{32}a_{21}.$$

so ergibt sich für den Kofaktor

$$\begin{aligned} \Lambda_{13} = & - a_{31}a_{22}a_{44} + a_{31}a_{24}a_{42} \\ & - a_{32}a_{24}a_{41} - a_{34}a_{42}a_{21} \\ & + a_{22}a_{34}a_{41} + a_{44}a_{32}a_{21} \end{aligned}$$

3.2.4.3 Die Ermittlung der Inversen[1)]

Wenn wir im folgenden in der Sprache der Ketten und Zyklen ein komparativ-statisches System ermitteln, das

1) BASSET/MAYBEE/QUIRK (1968), S. 55o f.

vollständig vorzeichenlösbar ist, so gehen wir wieder von der Gleichung $Ay = b$ aus, aus der sich ergibt

$$y = A^{-1}b \quad 1).$$

Die Vorzeichenlösbarkeit von $Ay = b$ hängt also davon ab, ob wir über das Vorzeichenbild von A^{-1} Aussagen machen können.
Wir wollen nun herausfinden, welches die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür sind, daß eine qualitative Matrix mit negativer Diagonale eine vorzeichenbestimmte Inverse aufweist.
Jede qualitative Matrix Q_A hat eine vorzeichenbestimmte Inverse dann und nur dann, wenn $/A/ \neq O$, wenn also ein Element ungleich Null ist in der Entwicklung der Determinante von A und es keine Elemente mit entgegengesetztem Vorzeichen in der Entwicklung irgendeines Kofaktors von $C \in Q_A$ gibt und es auch keine Elemente mit entgegengesetzten Vorzeichen in der Entwicklung von $/C/$ gibt.

Lemma 1: Besitzt A eine negative Diagonale, so gilt sign $/C/$ = sign $/D/$ für alle $C,D \in Q_A$ dann und nur dann, wenn alle Zyklen der Länge p ($2 \leq p \leq n$) in A nicht positiv sind.

a) notwendige Bedingung

Nehmen wir an, irgend ein Zyklus der Länge p sei positiv. In $/C/$ ($C \in Q_A$) gibt es ein Diagonalprodukt $c_{11} \cdots c_{nn}$ mit dem Vorzeichen $(-1)^n$. Außerdem gibt es aber noch ein Produkt, das aus dem positiven Zyklus und Diagonalelementen zusammengesetzt ist.
Jeder Zyklus der Länge p hat das Vorzeichen $(-1)^{p+1}$ 2).
Also hat das besagte Produkt das Vorzeichen

$$(-1)^{p+1}(-1)^{n-p} = (-1)^{n+1}.$$

Wenn zwei Produkte in der Entwicklung einer Determinante unterschiedliche Vorzeichen haben, gibt es ein $D \in Q_A$ für das gilt: sign $/C/ \neq$ sign $/D/$.

b) hinreichende Bedingung

Wenn alle Zyklen nicht positiv sind, haben alle

---

1) Wenn A regulär ist.

2) GRÖBNER (1966), S. 61.

Produkte in der Entwicklung von /C/, die ungleich Null sind, das gleiche Vorzeichen $(-1)^n$. Beachte nämlich, daß nach der Formel (15) jede Determinante als Produkt von Diagonalelementen und Zyklen geschrieben werden kann.

Lemma 2: Hat A eine negative Diagonale, dann gilt für die Kofaktoren der Diagonalelemente sign C_{ii} = sign D_{ii} für alle $C,D \in Q_A$ dann und nur dann, wenn alle Zyklen der Länge p ($2 \leq p \leq n$) in A nicht positiv sind.
Das ergibt sich aus der Tatsache, daß alle Hauptminoren der Ordnung n-1 aus C auch nach der Determinantenformel (15) berechnet werden können.

Lemma 3: A besitze eine negative Diagonale und alle Zyklen der Länge p ($2 \leq p \leq n$) seien nicht positiv. Dann hat Q_A eine vorzeichenbestimmte Inverse dann und nur dann, wenn alle Ketten a(j-i) in irgendeinem außerdiagonalen Kofaktor A_{ij} von A entweder nicht negativ oder nicht positiv sind.

Den Beweis können wir aus Formel (16) herleiten. Wenn wir dort die Vorzeichen einsetzen, die in dem Lemma vorausgesetzt sind, erhalten wir, wenn wir von d(A(jk)) und d(A(J)) nur die Vorzeichen aufschreiben:

$$A_{ij} = -(a_{j1}(-1)^{n-2} + \sum_{r=o}^{n-3}(-1)^{n-r}\sum_{J}(-1)^{r}A(1/j)_{(J')})$$

$$= -(a_{j1}(-1)^{n} + \sum_{r=o}^{n-3}(-1)^{n}\sum_{J}A(1/j)_{(J')})$$

Daraus ist zu ersehen, daß A_{ij} dann und nur dann ein eindeutiges Vorzeichen hat, wenn die a_{j1} und $A(i/j)_{(J')}$, die ungleich Null sind, alle das gleiche Vorzeichen aufweisen.
Sind z.B. alle Ketten negativ, so ergibt sich:

$$\text{sign } A_{ij} = -\left((-1)^{n+1} + \sum_{r=o}^{n-3}(-1)^{n+1} \right)$$

$$\text{sign } A_{ij} = (-1)^{n}.$$

Sind alle Ketten positiv, so gilt:

$$\text{sign } A_{ij} = -\left((-1)^n + \sum_{r=o}^{n-3} (-1)^n \right)$$

$$\text{sign } A_{ij} = (-1)^{n-1}.$$

Aus den vorhergehenden Lemmas ergibt sich unmittelbar

Theorem (1): Besitzt A eine negative Diagonale, so hat O_A dann und nur dann eine vorzeichenbestimmte Inverse, wenn alle Zyklen in A nicht positiv sind und alle Ketten a(j-i) in irgendeinem außerdiagonalen Kofaktor schwach[1] dasselbe Vorzeichen aufweisen.

Wenn eine Matrix die Eigenschaften des Theorems (1) besitzt und nicht zerlegbar ist, können einige der inversen Elemente ohne nähere Information bestimmt werden. Nach Definition 5 (S. 94) gilt:

$$a(i-j) \neq 0,$$
$$a(j-i) \neq 0.$$

1. $a_{ij} > 0$: $\quad \text{sign } a_{ij} = \text{sign } a(i-j) = (+)$

Wir haben oben festgestellt, daß für diesen Fall

$$\text{sign } A_{ji} = (-1)^{n-1}.$$

$$\text{sign } a_{ij}^{-1} = \text{sign } A_{ji} / \text{sign } /A/ = (-1)^{n-1}/(-1)^n$$

$$\text{sign } a_{ij}^{-1} = (-)\ ^{2)}.$$

Aus $\quad \text{sign } a(j-i)a_{ij} = (-)$ folgt

$$\text{sign } a(j-i) = (-).$$

Auf S. 1oo hatten wir für diesen Fall festgestellt, daß

$$\text{sign } A_{ij} = (-1)^n.$$

$$\text{sign } a_{ji}^{-1} = \text{sign } A_{ij} / \text{sign } /A/ = (-1)^n/(-1)^n$$

$$\text{sign } a_{ji}^{-1} = (+).$$

---

1) 'schwach' bedeutet, daß eine Kette auch Null sein kann.

2) $A^{-1} = \left[a_{ij}^{-1} \right]_1^n$

2. $a_{ij} < 0$: Dann gilt entsprechend den unter 1. angestellten Überlegungen:

$$\text{sign } a^{-1}_{ij} = (+)$$

$$\text{sign } a^{-1}_{ji} = (-).$$

Die Tatsache, daß die Inverse der Matrix A ein eindeutiges Vorzeichenbild aufweist, ist aber weder notwendig noch hinreichend für die Vorzeichenlösbarkeit des Systems. Das können wir uns klarmachen, wenn wir $y = A^{-1}b$ näher untersuchen:

$$y_i = \sum_j a^{-1}_{ij}\, b_j \qquad i = 1,\ldots,n$$

$$y_i = \sum (A_{ji}//A/) b_j \qquad i = 1,\ldots,n$$

a) Ist z.B. $b_k = 0$, dann spielt es für die Vorzeichenlösbarkeit von y keine Rolle, welches Vorzeichenbild die k-te Spalte der Inverse hat. Es ist also nicht notwendig, daß A eine vorzeichenbestimmte Inverse hat.

b) Ist z.B. $b > 0$ und die A_{ji} sind in ihrem Vorzeichen alle eindeutig bestimmt, aber es gibt in der i-ten Reihe von A^{-1} Kofaktoren mit entgegengesetzten Vorzeichen, dann ist das Vorzeichenbild von y nicht eindeutig bestimmbar. Die Vorzeichenbestimmtheit von A^{-1} ist also auch nicht hinreichend für die Vorzeichenlösbarkeit von y.

3.2.4.4 Das Vorzeichenbild des Lösungsvektors[1)]

Wir beschäftigen uns nun damit, in dem qualitativen System $Ay = b$ das Vorzeichenbild des Vektors y zu bestimmen.

Lemma 4: Wenn $Ay = b$ vorzeichenlösbar ist, folgt aus $B \in Q_A$, daß $/B/ \neq 0$.

Beweis : 1. Wir nehmen an, $b = 0$. Dann bedeutet $B \in Q_A$, $/B/ = 0$, daß es ein $w \neq 0$ gibt, so daß $Bw = B(-w) = 0$. Da $-w \notin Q_w$, ist $Ay = 0$ nicht vorzeichenlösbar.

1) BASSET/MAYBEE/QUIRK (1968), S. 556 f.

2. Wir nehmen an, $b \neq 0$. $B \in Q_A$, $c \in Q_b$, $/B/ = 0$ bedeutet, daß es ein $z \neq 0$ geben muß, so daß $B(kz) = 0$ für jedes k. Deshalb folgt aus $Bw = c$ und $B(kz) = 0$, daß $B(w + kz) = c$ für jedes k. Man kann k so wählen, daß $(w + kz) \notin Q_w$, so daß $Ay = b$ wiederum nicht vorzeichenlösbar ist.

Nun wollen wir einen Umformungsprozess beschreiben, mit dessen Hilfe das vorzeichenlösbare System $Ay = b$ in das vorzeichenlösbare System $\breve{A}\breve{y} = \breve{b}$ transformiert wird.

1. Da $/A/ \neq 0$, wählen wir eine Permutationsmatrix P, so daß in PA alle Diagonalelemente ungleich Null sind: $A' = PA$, $b' = Pb$. Wenn $Ay = b$ vorzeichenlösbar ist, ist auch $A'y = b'$ vorzeichenlösbar.

2. Wähle Diagonalmatrizen D_1 und D_2 mit folgenden Eigenschaften:

$$d^1_{ii} = (-1), \text{ wenn } y_i > 0$$
$$d^1_{ii} = (+1), \text{ wenn } y_i \leqq 0$$
$$d^2_{ii} = (-1), \text{ wenn } b'_i < 0$$
$$d^2_{ii} = (+1), \text{ wenn } b'_i > 0$$
$$d^2_{ii} = (+1), \text{ wenn } b'_i = 0 \text{ und } a'_{ii} d^1_{ii} < 0$$
$$d^2_{ii} = (-1), \text{ wenn } b'_i = 0 \text{ und } a'_{ii} d^1_{ii} > 0.$$

$$\breve{A} = D_2 A' D_1^{-1}, \quad \breve{y} = D_1 y, \quad \breve{b} = D_2 b' .$$

Wenn $Ay = b$ vorzeichenlösbar ist, ist auch $\breve{A}\breve{y} = \breve{b}$ vorzeichenlösbar, wobei durch die Transformation $\breve{y} \leqq 0$, $\breve{b} \geqq 0$ und alle Diagonalelemente in $\breve{A}$ negativ sind[1].

Zur Herleitung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Vorzeichenlösbarkeit benutzen wir nun die oben erarbeiteten Theoreme und wenden sie auf

---

1) Aus $\breve{y} \leqq 0$ und $\breve{b} > 0$ ergibt sich

$$\breve{y}_i = \sum_{j=1}^{n} \breve{a}^{-1}_{ij} \breve{b}_j < 0 \rightarrow \breve{a}^{-1}_{jj} \breve{b}_j < 0 \rightarrow \breve{a}^{-1}_{jj} < 0$$

$$\rightarrow \breve{A}_{jj} /\breve{A}/ < 0 \rightarrow \breve{A}_{jj} < 0.$$

das System $\mathfrak{A}\mathfrak{y} = \mathfrak{b}$ an.
Alle Produkte in der Entwicklung von $/\mathfrak{A}/$, die nicht Null sind, müssen das Vorzeichen $(-1)^n$ des Diagonalprodukts aufweisen. Außerdem gilt:

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{b}.$$

Da $\mathfrak{A}^{-1} = \left[\frac{\mathfrak{A}_{ji}}{/\mathfrak{A}/}\right]_1^n$, ist $\mathfrak{y} = \left[\frac{\mathfrak{A}_{ji}}{/\mathfrak{A}/}\right]\mathfrak{b}$

Daraus folgt:

$$\mathfrak{y}_i = (1//\mathfrak{A}/) \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_{ji}\mathfrak{b}_j \qquad i = 1,\ldots,n .$$

Da $\mathfrak{y}_i \leqq 0$, gilt im Falle $\mathfrak{b}_j > 0$, daß alle Kofaktoren in der Reihe i das Vorzeichen $(-1)^{n-1}$ oder (0) haben müssen, weil für alle Produkte gilt

$$\operatorname{sign}(\mathfrak{A}_{ji}\mathfrak{b}_j) = (-1)^{n-1}.$$

Diese Überlegungen führen zu folgendem Theorem:

Theorem (2): Das System Ay = b ist vollständig vorzeichenlösbar dann und nur dann, wenn - nach einer Transformation in das System $\mathfrak{A}\mathfrak{y} \leqq \mathfrak{b}$, wobei $\mathfrak{y} \leqq 0$, $\mathfrak{b} \geqq 0$, $\mathfrak{a}_{ii} < 0$ für alle i - die folgenden Bedingungen erfüllt sind: (1) Jeder Zyklus von $\mathfrak{A}$ ist nicht positiv.
(2) Aus $\mathfrak{b}_{i_r} > 0$ folgt, daß jede Kette $\mathfrak{a}(j\text{-}i_r)$ in $\mathfrak{A}$ nicht negativ ist.

Beweis: Nach Lemma 1 ist die Bedingung (1) notwendig und hinreichend, damit sign /C/ = $(-1)^n$ für $C \in Q_A$, wenn in $\mathfrak{A}$ alle Diagonalelemente negativ sind.
Wenn $\mathfrak{b}_{i_r} = 0$, unterliegen die Kofaktoren der i_r-ten Reihe von $\mathfrak{A}$ keiner Beschränkung in Bezug auf das Vorzeichen; für $\mathfrak{b}_{i_r} > 0$ haben wir oben gesehen, daß alle Kofaktoren der i_r-ten Reihe von $\mathfrak{A}$ das Vorzeichen $(-1)^{n-1}$ aufweisen.
Wenn $\mathfrak{b}_{i_r} > 0$, gilt: sign $\mathfrak{A}_{i_r j} = (-1)^{n-1}$ oder (0).
Beim Beweis des Lemmas 3 hatten wir jedoch mit Hilfe der Formel (16) herausgefunden, daß dies dann und nur

dann der Fall ist, wenn alle Ketten $a(j-i_r)$ nicht negativ sind (S. 1o1). Damit ist das obige Theorem bewiesen.

3.2.4.5 Kritik und Vergleich mit anderen Formen

Theorem (2) hat den Nachteil, daß es nicht unmittelbar anwendbar ist.
Ziel des Theorems ist es ja, notwendige und hinreichende Bedingungen zur Ermittlung des Vorzeichenbildes von y aufzufinden. Bei dem Umformungsprozeß, der auf S. 1o3 beschrieben ist, wird aber gerade das Vorzeichenbild von y als bekannt vorausgesetzt. Wir wollen diese Schwierigkeit anhand des folgenden Beispiels veranschaulichen.
Gegeben ist[1] $Ay = b$, wobei folgende Vorzeichenbilder vorhanden sind:

	1	2	3	4	5	b
1	+	-	0	-	+	-
2	0	+	0	-	0	0
3	-	-	+	-	+	-
4	0	+	0	+	-	-
5	0	+	0	+	+	0

$$y = (dx_1/d\alpha, dx_2/d\alpha, dx_3/d\alpha, dx_4/d\alpha, dx_5/d\alpha)$$

Den Umformungsprozeß können wir nun nicht - wie auf S. 1o3 beschrieben - damit beginnen, daß wir die Elemente der Diagonalmatrix D_1 ermitteln, denn diese könnten wir nur ermitteln, wenn uns das Vorzeichenbild von y bereits bekannt wäre. Wir wollen deshalb anders vorgehen.
Wir multiplizieren die erste, dritte und vierte Zeile mit (-1), damit $b_i > 0$ für $i = 1,3,4$. Wir erhalten dann folgende Vorzeichenbilder:

---

1) Das gleiche Beispiel wird auf S. 71 ff. benutzt.

	1	2	3	4	5	b
-1	-	+	0	+	-	+
2	0	+	0	-	0	0
-3	+	+	-	+	-	+
-4	0	-	0	-	+	+
5	0	+	0	+	+	0

Wir sehen, daß die Diagonalelemente a_{22} und a_{55} größer Null sind. Der Umformungsprozeß muß also fortgesetzt werden, um die Matrix in eine Form zu bringen, die die Anwendung des Theorems zuläßt, d.h. a_{22} und a_{55} müssen negativ werden.
Das kann auf vier unterschiedliche Arten geschehen, indem wir nämlich folgende Zeilen und Spalten mit (-1) multiplizieren:

1. Möglichkeit: Zeile 2 und Zeile 5
2. Möglichkeit: Spalte 2 und Zeile 5
3. Möglichkeit: Zeile 2 und Spalte 5
4. Möglichkeit: Spalte 2 und Spalte 5 .

Alle vier Möglichkeiten sind daraufhin zu überprüfen, ob sie die obigen Vorzeichenbilder in eine Form bringen, die die Bedingungen des Theorems (2) erfüllt.

1. Multipliziere Zeile 2 und Zeile 5 mit (-1).
   Dann erhalten wir folgende Vorzeichenbilder:

	1	2	3	4	5	b
-1	-	+	0	+	-	+
-2	0	-	0	+	0	0
-3	+	+	-	+	-	+
-4	0	-	0	-	+	+
-5	0	-	0	-	-	0

Diese Matrix erfüllt die Bedingungen des Theorems (2) nicht, weil z.B. $b_4 > 0$, aber die Kette der Länge 1 $a_{54} < 0$. Das ist ein Verstoß gegen Bedingung (2) des Theorems.

2. Multipliziere Spalte 2 und Zeile 5 mit (-1). Daraus ergibt sich folgendes Vorzeichenbild:

	1	-2	3	4	5	b
-1	-	-	0	+	-	+
2	0	-	0	-	0	0
-3	+	-	-	+	-	+
-4	0	+	0	-	+	+
-5	0	+	0	-	-	0

Auch diese Form verstößt gegen Bedingung (2) des Theorems, weil $b_4 > 0$, aber a_{24}, $a_{54} < 0$.

3. Multipliziere Zeile 2 und Spalte 5 mit (-1).

	1	2	3	4	-5	b
-1	-	+	0	+	+	+
-2	0	-	0	+	0	0
-3	+	+	-	+	+	+
-4	0	-	0	-	-	+
5	0	+	0	+	-	0

Diese Form erfüllt das Theorem.

4. Multipliziere Spalte 2 und Spalte 5 mit (-1).

	1	-2	3	4	-5	
-1	-	-	0	+	+	+
2	0	-	0	-	0	0
-3	+	-	-	+	+	+
-4	0	+	0	-	-	+
5	0	-	0	+	-	0

Auch diese Form verstößt gegen Bedingung (2) des Theorems (2), weil $b_4 > 0$, aber $a_{24} < 0$.

Wir stellen also fest, daß nur die dritte Möglichkeit zu der gewünschten Umformung führt. Das bedeutet, daß

$$\bar{y} = (dx_1/d\alpha, dx_2/d\alpha, dx_3/d\alpha, dx_4/d\alpha, -dx_5/d\alpha) < 0.$$

Der Multiplikatorvektor hat also das eindeutige Vorzeichenbild

(- - - - +).

Es gibt jedoch eine weitere Möglichkeit, das Theorem nutzbar zu machen, indem wir nämlich eine Spalte suchen, die kein Nullelement enthält und das System so umschreiben, daß diese Spalte zum Vektor b wird. Wir nehmen hierzu die zweite Spalte des obigen Beispiels. Dann sehen die Vorzeichenbilder folgendermaßen aus:

	1	2	3	4	5	b
1	+	0	-	+	+	+
2	0	0	-	0	0	-
3	-	+	-	+	+	+
4	0	0	+	-	+	-
5	0	0	+	+	0	-

$$y = (dx_1/dx_2, dx_3/dx_2, dx_4/dx_2, dx_5/dx_2, d\alpha/dx_2)$$

Nun müssen wir die zweite mit der dritten und die vierte mit der fünften Zeile vertauschen, damit alle $a_{ii} \neq 0$.

	1	2	3	4	5	b
1	+	0	-	+	+	+
3	-	+	-	+	+	+
2	0	0	-	0	0	-
5	0	0	+	+	0	-
4	0	0	+	-	+	-

Die drei letzten Zeilen müssen nun mit (-1) multipliziert werden, damit $b > 0$.

	1	2	3	4	5	b
1	+	0	-	+	+	+
3	-	+	-	+	+	+
-2	0	0	+	0	0	+
-5	0	0	-	-	0	+
-4	0	0	-	+	-	+

Da alle Diagonalelemente negativ sein müssen, multiplizieren wir die ersten drei Spalten mit (-1), um die Form $A\bar{y} = \bar{b}$ zu erhalten:

	-1	-2	-3	4	5	b
1	-	0	+	+	+	+
3	+	-	+	+	+	+
-2	0	0	-	0	0	+
-5	0	0	+	-	0	+
-4	0	0	+	+	-	+

$\breve{y} = (-dx_1/dx_2, -dx_3/dx_2, -dx_4/dx_2, dx_5/dx_2, d\alpha/dx_2) < 0.$

Jetzt können wir ohne Schwierigkeiten erkennen, ob das System in der Form ist, die Theorem (2) fordert. Wenn $\breve{b} > 0$, dann sind nämlich nach Bedingung (2) des Theorems alle Ketten $a(j-i)$ nichtnegativ. Das bedeutet, daß es kein außerdiagonales Element gibt, das negativ ist. Dies wiederum heißt auch, daß für alle Zyklen gelten würde

$$a(j-i)a_{ij} \geq 0.$$

$a(j-i)a_{ij} > 0$ würde gegen Bedingung (1) des Theorems verstoßen, so daß alle Zyklen der Länge p ($2 \leq p \leq n$) gleich Null sind. Diese Bedingungen entsprechen der Lancasterschen Standardform.[1] Sie sind im obigen Beispiel erfüllt.

Wenn wir alle anderen Elemente von $\breve{y}$ durch $d\alpha/dx_2$ teilen, erhalten wir die ursprünglichen Multiplikatoren:

$dx_1/d\alpha = (+)/(-) = (-)$; $dx_2/d\alpha = (-)$

$dx_3/d\alpha = (+)/(-) = (-)$; $dx_4/d\alpha = (+)/(-) = (-)$

$dx_5/d\alpha = (-)/(-) = (+)$.

Der Multiplikatorvektor hat also das Vorzeichenbild:

$$(- - - - +).$$

In der Lancasterschen Standardform $\bar{A}\bar{z} = 0$ (S. 68) muß nämlich eine der beiden letzten Spalten dem Vektor $\breve{b}$ des Systems $\breve{A}\breve{y} = \breve{b}$ entsprechen, wenn $\breve{b} > 0$. Gleichgültig, ob wir die n-te oder die n+1 - te Spalte der Lancasterschen Standardform als Vektor b wählen,

---

1) Vgl. auch BASSET/MAYBEE/QUIRK (1968), S. 557.

als Restmatrix erhalten wir eine Matrix, die - wenn das System in der Form $\bar{A}\bar{y} = \bar{b}$ ist - unterhalb der Hauptdiagonale nur Nullen aufweist, was bedeutet, daß kein Zyklus der Länge p ($2 \leq p \leq n$) ungleich Null ist. Außerdem sind alle Diagonalelemente negativ und alle außerdiagonalen Elemente, die ungleich Null sind, positiv, was bedeutet, daß es keine negativen Ketten gibt.
Wählen wir z.B. die n-te Spalte einer Lancasterschen Standardform als Vektor b:

	1	2	...	n	b
1	-	+	...	+	-
2	0	-	...	+	-
.	.	.	...	.	.
n-1	0	0	...	+	-
n	0	0	...	+	+

Nach Multiplikation der ersten (n-1) Zeilen und aller n Spalten mit (-1) erhalten wir:

	-1	-2	...	-n	b
-1	-	+	...	+	+
-2	0	-	...	+	+
.	.	.	...	.	.
-(n-1)	0	0	...	+	+
n	0	0	...	-	+

Theorem (2) beweist also folgendes: Wenn in einem nicht degenerierten System Az = 0 ein Spaltenvektor vorhanden ist, der keine Nullelemente enthält und nach Umformulierung in das System $\bar{A}\bar{y} = \bar{b}$ die Bedingungen (1) und (2) des Theorems (2) erfüllt sind, dann muß das System in die Lancastersche Standardform zu bringen sein [1].
Oder anders ausgedrückt: Wenn die Matrix A eines nicht degenerierten linearen nx(n+1) Gleichungssystems Az = 0 eine Spalte enthält, in der keine Nullelemente auftauchen, so ist das System nur dann vorzeichen-

---

1) Die Standardform kann allerdings oberhalb der Diagonale so viele Nullen enthalten, wie erlaubt sind, damit das System nicht zerlegbar im Sinne der Formen auf S. 79 ff. wird und ein Vektor b > 0 erhalten bleibt.

lösbar, wenn es in die Lancastersche Standardform gebracht werden kann.[1)]
Diese einfache Anwendungsmöglichkeit des Theorems entfällt jedoch, wenn zerlegbare System vorhanden sind, wie wir sie auf S. 79 ff. untersucht haben. Ist die Matrix nämlich zerlegbar im Lancasterschen Sinne (S. 79 f.), so können wir zwar möglicherweise einen Vektor b finden, der keine Nullelemente enthält, die Determinante der Matrix des restlichen Systems ist aber Null, so daß es keine Permutationsmatrix geben kann, mit deren Hilfe die Matrix so transformiert werden kann, daß alle Diagonalelemente ungleich Null sind. Ist die Matrix zerlegbar in der Art, wie wir es auf S. 81 ff. dargestellt haben, dann gibt es keine Spalte, die keine Nullelemente enthält.

Das bedeutet jedoch nicht, daß die Bedingungen des Theorems (2) nicht denen der Lancasterschen Standardform entsprechen könnten, wenn kein Vektor ohne Nullelemente vorhanden ist.
Ist in einem nicht zerlegbaren System (i.S.v. S. 79 ff.) kein Spaltenvektor ohne Nullelemente vorhanden, so gibt es grundsätzlich folgende Möglichkeiten:

a) Das System kann in die Gormansche Form gebracht werden, zu deren typischen Eigenschaften es ja gehört, daß in jeder Spalte ein Nullelement vorhanden ist.

b) Das System kann in die Lancastersche Form gebracht werden, wobei aber nicht alle außerdiagonalen Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen positiv, sondern mindestens zwei Null sind.[2)]

Wie unterscheiden sich nun diese beiden Formen in der Sprache der Ketten und Zyklen? Untersuchen wir zunächst die Gormansche Form

---

1) Vgl. Fußnote 1), S. 11o.

2) Entsprechend den beiden Spaltenvektoren, die in der Lancasterschen Standardform ohne Nullelemente vorhanden sein dürfen.

	1	2	3	4
1	+	+	-	-
2	+	-	0	0
3	0	0	-	-

Je nachdem, welche Spalte wir als Vektor b wählen, können wir folgende Systeme $\mathfrak{A}\mathfrak{y} = \mathfrak{b}$ bilden:

	-2	-3	-4	b(1)
-2	-	0	0	+
-1	+	-	-	+
-3	0	+	-	0

	-1	-3	-4	b(2)
2	-	0	0	+
-1	+	-	-	+
-3	0	+	-	0

	-1	-2	-4	b(3)
1	-	-	+	+
-2	+	-	0	0
-3	0	0	-	+

	-1	-2	-3	b(4)
-1	-	-	+	+
2	+	-	0	0
-3	0	0	-	+

In allen Fällen besitzt $\mathfrak{A}$

1. Zwei Ketten der Länge 1, die positiv sind
2. Eine Kette der Länge 1, die negativ ist
3. Einen negativen Zyklus der Länge 2.

Sehen wir uns eine entsprechende Lancastersche Standardform an, die keine Spalte ohne Nullelemente aufweist:

	1	2	3	4
1	-	+	+	0
2	0	-	0	+
3	0	0	-	+

Wir erhalten folgende Systeme $\mathfrak{A}\mathfrak{y} = \mathfrak{b}$:

	-2	-3	-4	b(1)
1	-	-	0	+
-3	0	-	+	0
2	+	0	-	0

	-1	-3	-4	b(2)
-1	-	+	0	+
-3	0	-	+	0
2	0	0	-	+

	-1	-2	-4	b(3)
-1	-	+	0	+
-2	0	-	+	0
3	0	0	-	+

	-1	-2	-3	b(4)
-1	-	+	+	0
-2	0	-	0	+
-3	0	0	-	+

Nicht in allen Fällen besitzt $\mathfrak{A}$ in der Sprache der Ketten und Zyklen einheitliche Eigenschaften. Der erste Fall ist charakterisiert durch
1. zwei Ketten der Länge 1, die positiv sind,
2. eine Kette der Länge 1, die negativ ist,
3. einen Zyklus der Länge 3, der negativ ist.
Die anderen Fälle sind dadurch charakterisiert, daß es keine außerdiagonalen Elemente gibt, die negativ sind und daß alle Zyklen der Länge p ($2 \leq p \leq n$) negativ sind.

Allgemein kann man sagen, daß die Lancastersche Standardform sich von der Gormanschen Form in der Sprache der Ketten und Zyklen nur dann unterscheidet, wenn in der Anordnung $\mathfrak{A}\mathfrak{y} = \mathfrak{b}$ der Vektor $\mathfrak{b}$ einer der letzten Spalten in der Lancasterschen Standardform entspricht. Dann gibt es nämlich keine Zyklen der Länge p ($2 \leq p \leq n$) mehr, die ungleich Null sind und alle Ketten, die ungleich Null sind, sind positiv, während in jeder Gormanschen Form außer den Diagonalelementen Zyklen existieren, die ungleich Null sind und auch negative Ketten auftreten können.

3.2.5 Die Kausalstruktur in der Sprache der Ketten und Zyklen

Wir haben in den Abschnitten 3.2.1.3 und 3.2.3.3 die Kausalordnung der Lancasterschen und der Gormanschen Form untersucht und waren zu dem Ergebnis gekommen, daß beide aus Kausalketten (bzw. Quasi-Kausalketten)[1] bestehen, daß es aber nur bei der Lancasterschen Standardform Kausalordnungen gibt, deren vollständige Untermengen jeweils nur eine einzige Gleichung enthalten[2] und nur in der vollständigen Untermenge nullter Ordnung mehrere Gleichungen enthalten sein können, während bei der Gormanschen Form in allen vollständigen Untermengen mehrere Gleichungen enthalten sein können, aber zumindest eine vollständige Untermenge existiert, die mehrere Gleichungen umfaßt.
In Abschnitt 3.2.4.5 haben wir festgestellt, daß das typische Erscheinungsbild der Lancasterschen Standardform in der Sprache der Ketten und Zyklen darin besteht, daß keine Zyklen der Länge p ($2 \leq p \leq n$) existieren, die ungleich Null sind und daß alle Ketten nicht negativ sind[3], während dagegen bei der Gormanschen Form immer negative Ketten existieren können[4] und negative Zyklen vorhanden sein müssen.
Die Unterschiede zwischen der Lancasterschen und der Gormanschen Form können also sowohl durch die Kausalordnungen als auch durch die Ketten und Zyklen in beiden Systemen beschrieben werden.

---

1) Ausnahmen vgl. S. 90, Fn. 1.

2) Wenn die in der Lancasterschen Standardform als n-te oder als (n+1)-te auftretende Variable exogen ist.

3) Dann entspricht Vektor $\mathfrak{b}$ der Koeffizientenspalte der in der Lancasterschen Standardform als n-te oder als (n+1)-te auftretenden Variablen.

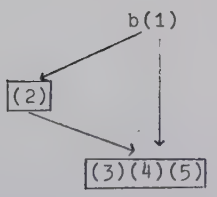
4) In der Spalte j für die $b_j = 0$ gilt.

Das ist - wie wir im folgenden zeigen wollen - darauf zurückzuführen, daß die charakteristischen Eigenschaften eines Systems Ay = b in der Sprache der Ketten und Zyklen den charakteristischen Eigenschaften der zugehörigen Kausalordnung äquivalent sind:

a) Einem Pfeil von Variablen j nach Variable i entspricht in der grafischen Darstellung der Kausalordnung eine Kette a(i-j).
b) Sind in einer vollständigen Untermenge mehrere Gleichungen enthalten, so gibt es Zyklen der Länge p ($2 \leq p \leq n$), die ungleich Null sind und die Indizes der darin vorkommenden Variablennummern tragen. Zyklen zwischen Variablen, die in vollständigen Untermengen unterschiedlicher Ordnung bestimmt werden, existieren nicht.[1)]

Veranschaulichen wir beides an der Gormanschen Form II, wobei wir annehmen, daß die erste Variable exogen vorgegeben ist, bzw. als Vektor b benutzt wird. (S. 89, erstes Bild rechts):

					b(1)
-	+	+	+	1	-
+	0	0	0	2	-
0	-	+	+	3	0
0	0	-	+	4	0
2	3	4	5		



Gl. 2

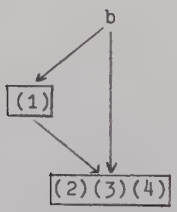
Gl. 1,3,4

1) Wenn ein Pfeil von Variable j nach Variable i geht, kann also auch keine Kette a(j-i) vorhanden sein, weil sonst der Zyklus **a(j-i)a(i-j) ≠ 0** wäre.

Um das System in die Form $\bar{A}\bar{y} = \bar{b}$ zu bringen, müssen wir erst die üblichen Umformulierungen vornehmen:

	1	2	3	4		b(1)
1	-	0	0	0	2	+
2	+	-	-	-	1	+
3	0	+	-	-	3	0
4	0	0	+	-	4	0
	-2	-3	-4	-5		

Die Koeffizientenindizes werden dadurch natürlich geändert, so daß sich auch die Nummern in der obigen Kausalordnung ändern:



Gl. 1

Gl. 2,3,4

Nach Theorem (2) (S.104) müssen alle Ketten a(j-1) und a(j-2) nicht negativ sein, weil $b_1, b_2 > 0$.

a(j-1): $a_{21} > 0$ a(2-1)

$a_{32}a_{21} > 0$ a(3-1)

$a_{43}a_{32}a_{21} > 0$ a(4-1)

a(j-2): $a_{32} > 0$ a(3-2)

$a_{43}a_{32} > 0$ a(4-2).

Alle Zyklen müssen nicht positiv sein:

$a_{23}a_{32} < 0$

$a_{34}a_{43} < 0$

$a_{24}a_{43}a_{32} < 0.$

Beide Bedingungen des Theorems (2) sind also erfüllt. Gleichzeitig geht daraus hervor, daß auch die Äquivalenzbeziehungen a und b zutreffen. Dem Pfeil

$$(1) \longrightarrow (2)(3)(4)$$

entsprechend gibt es Ketten a(i-1), i=2,3,4, die ungleich Null sind. Die Untermenge erster Ordnung umfaßt die Gleichungen 2,3,4 mit denselben Variablennummern, also gibt es Zyklen mit den Indizes 2,3,4. Ist in der obigen Matrix z.B. $a_{24} = 0$, dann fällt der Zyklus der Länge 3 weg. Da sich aber nichts an der Kausalstruktur ändert, sind immer noch Zyklen der Länge 2 vorhanden, in denen die Variablennummern 2,3,4 als Indizes vorkommen.

Wir untersuchen nun zunächst die allgemeine Form dieses Zusammenhangs bei Systemen, die aus Quasi-Kausalketten bestehen, d.h. solche Systeme, bei denen die Variablen, die in der k-ten vollständigen Untermenge bestimmt werden, exogen zu allen vollständigen Untermengen höherer Ordnung sind.
Wenn ein solches System in der Form $\mathfrak{A}\mathfrak{y} = \mathfrak{b}$ k vollständige Untermengen verschiedener Ordnung aufweist, dann kann die Matrix $\mathfrak{A}$ in die Form

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & A_{kk} \end{bmatrix}$$

gebracht werden[1], wobei die A_{ii} (i = 1,...,k) nicht zerlegbare quadratische Untermatrizen sind und die Matrizen unter der Hauptdiagonale nur Nullelemente enthalten. Wegen dieser Nullmatrizen sind alle Ketten

$$a(p-q) = 0,$$

1) Vgl. S. 79 und 91. Taucht eine dreieckige mxm Untermatrix auf, so wird sie hier als ein System von m nicht zerlegbaren Untermatrizen bezeichnet.

wenn p der Index einer Spalte (oder Zeile) der Matrix A_{ii} (i = 1,...,k), q der Index einer Spalte (oder Zeile) der Matrix A_{jj} (j = 1,...,k) und i > j. Wegen der Annahme einer Quasi-Kausalkette (Pfeil von Untermenge r zu Untermenge s, wobei r ∋ p und s ∋ q) gibt es keine Untermatrix A_{uv}, u,v, ∈ {1,...,k}, u < v, die nicht in mindestens einer Spalte mindestens ein Element aufweist, das ungleich Null ist[1]. Dadurch wiederum ist sichergestellt, daß

$$a(q-p) \neq 0.$$

Den Pfeilverbindungen der Variablen p zu den Variablen q entsprechen also Ketten a(q-p)[2] (Äquivalenzbeziehung a).
Sind in einer vollständigen Untermenge h Variablen enthalten, so bedeutet dies, daß in der obigen zerlegbaren Matrix eine hxh Matrix auf der Diagonale erscheint, die nicht zerlegbar ist. Daraus folgt nach unserer Definition 5 (S. 94), daß für alle i ≠ j in der betreffenden Matrix Ketten a(i-j) existieren, die ungleich Null sind. Also gibt es auch Zyklen

$$a(i-j)a(j-i) \neq 0.$$

Dagegen gibt es zwischen Variablen, die in unterschiedlichen Untermengen bestimmt werden, keine Zyklen, weil

$$a(p-q)a(q-p) = 0.$$

Damit ist auch die Äquivalenzbeziehung b bewiesen.

Die Beziehung a ist nicht ohne weiteres umkehrbar, weil es in Systemen, die der Lancasterschen oder Gormanschen Form entsprechend und zusätzliche Nullen enthalten und in die Form $\bar{A}\bar{y} = \bar{b}$ gebracht werden, durchaus vorkommen kann, daß die Kette a(q-p) ≠ 0,

---

1) Wegen der Pfeile, die von b zu allen vollständigen Untermengen ausgehen, gibt es auch im Vektor b keine Untervektoren, die nur Nullelemente enthalten, wenn b so zerlegt wird wie die Matrix.

2) Das trifft auf alle Systeme Ay = b zu, wenn $a_{ii} \neq 0$ für i = 1,...,n.

obwohl die Variablen p nicht exogen zu den Variablen q sind, es also keine Pfeilverbindungen zwischen beiden Variablengruppen gibt. Das rührt daher, daß in der obigen zerlegbaren Matrix nur dann keine Kette a(q-p) vorhanden ist, wenn wir es mit einem nicht integrierten System zu tun haben, d.h. wenn alle außerdiagonalen Matrizen einer Reihe Nullmatrizen sind. Hinreichend für die Existenz einer Kette $a(q-p) \neq 0$ ist also, daß in keiner Reihe nur außerdiagonale Nullmatrizen vorkommen. Das schließt jedoch nicht aus, daß eine außerdiagonale Matrix $A_{ij}(i < j)$ Null sein kann, so daß ein Pfeil in der Kausalordnung fehlt, aber trotzdem die entsprechende Kette vorhanden ist. Wir wollen das an einem Beispiel (vgl. S. 92) veranschaulichen:

Die Matrix

	1	2	3	4
	-	-	+	0
	+	-	0	0
	0	0	-	+
	0	0	0	-

kann zerlegt werden in

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}$$

wobei $A_{11} = \begin{bmatrix} - & - \\ + & - \end{bmatrix}$ $A_{12} = \begin{bmatrix} + \\ 0 \end{bmatrix}$ $A_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$A_{22} = [-]$ $A_{23} = [+]$ $A_{33} = [-]$

Weil $A_{13} = 0$, ist die Variable 4 nicht exogen zur Untermenge zweiter Ordnung, in der die Variablen 1 und 2 bestimmt werden, aber trotzdem gibt es Ketten

$$a(1-4) = a_{13}a_{34} \neq 0 \quad \text{und}$$

$$a(2-4) = a_{21}a_{13}a_{34} \neq 0.$$

3.3 Einwände gegen die qualitative Analyse

In Abschnitt 3.1.4 hatten wir festgestellt, daß es Fälle gibt, in denen sich mit dem Lancasterschen Lösungsverfahren nicht ohne zusätzlichen Aufwand das eindeutige Vorzeichenbild des Lösungsvektors ermitteln läßt. Wir wollen nun anhand eines Beispiels überprüfen, inwieweit diese Fälle mit Hilfe des Theorems über die Standardformen oder des Theorems (2) in Abschnitt 3.2.4.4 gelöst werden können. Wir schreiben noch einmal die Koeffizientenmatrix und deren Vorzeichenbild für $d\alpha \neq 0$[1]:

dp	di	dw	dα
$(-w/p^2)BX_NN_w'$	$(I_1 + C_1)$	$(1/p)BX_NN_w'$	0
$(-w/p^2)L_XX_NN_w' + M^a/p^2$	0	$(1/p)L_XX_NN_w'$	0
$(-w/p^2)(N_w' - A_w')$	0	$(1/p)(N_w' - A_w')$	$-A_\alpha$

	dp	di	dw	dα
1	-	-	+	0
2	+	0	-	0
3	+	0	-	-

Die Vorzeichenmatrix kann nicht in die Lancastersche Standardform gebracht werden. Zwar kann man durch Vertauschen der Spalten **erreichen**, daß unter der Hauptdiagonale nur noch Nullelemente auftauchen:

---

1) Vgl. S. 51. Die Argumentation für $dG \neq 0$ und $dM^a \neq 0$ lautet ähnlich, ist aber insofern untypisch als in diesen beiden Fällen der Lösungsvektor Nullelemente enthält.

	di	dα	dp	dw
1	-	0	-	+
2	0	-	+	-
3	0	0	+	-

Aber es ist nicht möglich, durch Multiplikation ganzer Zeilen und/oder Spalten das Vorzeichenbild so zu verändern, daß die Elemente der Hauptdiagonale alle negativ und die Elemente rechts der Hauptdiagonale positiv sind (oder Null).
Die Matrix kann auch nicht in die Gormansche Form gebracht werden, weil sie nicht zwei Zeilen mit zwei Nullen aufweist.
Wählen wir dw als Vektor b und nehmen die entsprechenden Umformungen vor, so sehen wir, daß die Matrix auch nicht die Bedingungen des Theorems (2) (S.1o4) erfüllt:

	$-\frac{dp}{dw}$	$-\frac{di}{dw}$	$\frac{d\alpha}{dw}$	b
2	-	0	0	+
-1	-	-	0	+
3	-	0	-	+

Ersetzen wir jedoch in der ursprünglichen Vorzeichenmatrix (S.12o) die erste und dritte Zeile durch die mit Hilfe der Linearkombinationen S. 56 ermittelten Vorzeichenbilder (d) und (e)

	dp	di	dw	dα
d	+	-	0	0
2	+	0	-	0
e	-	0	0	-

dann können wir die neue Vorzeichenmatrix in die Lancastersche Standardform

	dw	di	-dα	dp
d	-	0	0	+
2	0	-	0	+
- e	0	0	-	+

bzw. in die Form des Theorems (2)

	$\frac{di}{d\alpha}$	$\frac{dw}{d\alpha}$	$\frac{dp}{d\alpha}$	b
d	-	0	+	0
2	0	-	+	0
e	0	0	-	+

bringen, die beide zu dem Ergebnis führen, daß der Maultiplikatorvektor negativ ist:

$$\text{sign } (di/d\alpha,\ dw/d\alpha,\ dp/d\alpha) = (- - -).$$

Die von Basset formulierte und von Lloyd unterstützte Kritik an dem Lancasterschen Algorithmus ist also ein grundlegender Einwand gegen die Brauchbarkeit aller in den Abschnitten 3.1 und 3.2 dargestellten Verfahren, während die nach unserer Regel (S. 57) gebildeten **Linearkombinationen alle Verfahren** wieder anwendungsfähig machen.
Wir wollen dies im folgenden näher erläutern:

Der Grund dafür, daß bei einer bestimmten Art von Modellen die qualitative Analyse nicht unmittelbar zum vorhandenen eindeutigen Vorzeichenbild des Lösungsvektors führt, liegt nicht - wie Basset behauptet - in der "chain nature of their coefficients"[1].

Wenn bei der komparativ-statischen Analyse eines Modells Koeffizienten vorkommen, die sich aus Ketten von partiellen Ableitungen zusammensetzen, ist dies einzig und allein auf eine bestimmte Schreibweise dieses Modells zurückzuführen und somit eine rein technische Angelegenheit.
Ob wir z.B. die Gütermarktgleichung des Bassetschen Modells

$$0 = I(i, X(N(w'))) + C(i, X(N(w'))) + G - X(N(w')))$$

---

1) BASSET (1968), S. 523.

verwenden oder die Schreibweise

$$\begin{aligned} I(i,X) + C(i,X) + G - X &= 0 \\ X - X(N) &= 0 \\ N - N(w') &= 0 \end{aligned}$$

benutzen, kann nichts an der Vorzeichenlösbarkeit des daraus entwickelten komparativ-statischen Systems ändern. So können wir das ganze Bassetsche Modell (und alle Modelle dieser Art) so aufschreiben, daß die Elemente der daraus ableitbaren Koeffizientenmatrix sich nicht mehr aus Produkten zusammensetzen, sondern nur aus Summen und Einzelelementen bestehen. Aber selbst wenn wir bei dieser ausführlichen Schreibweise alle quantitativen Informationen[1)] durch Linearkombinationen der entsprechenden Zeilen ausnutzen, wird das System nicht vorzeichenlösbar. Also ist der Kettencharakter der Koeffizienten keine Ursache für die mangelnde Anwendbarkeit der qualitativen Analyse.

Wenn das Vorzeichen einer Determinante, deren quantitative Informationen gemäß Abschnitt 3.1.2.4 ausgenutzt sind, aufgrund des Vorzeichenbildes nicht ermittelt werden kann, so müssen in der Entwicklung der Determinante Produkte auftreten, deren Vorzeichen entgegengesetzt sind. Setzt man nun die Koeffizienten statt bloß ihrer Vorzeichen ein und ergibt sich dann ein eindeutiges Vorzeichen der Determinante, dann kann das nur darauf zurückzuführen sein, daß die Summe der Produkte mit entgegengesetztem Vorzeichen Null ist.

Der Grund für die mangelnde Vorzeichenlösbarkeit des Vorzeichenbildes der Determinante lag also darin, daß identische Elemente mit unterschiedlichen Vorzeichen in verschiedenen Produkten der entwickelten Determinante aufgetreten sind. Das wiederum heißt, daß in der Determinante Unterdeterminanten enthalten

---

1) Informationen, die Angaben über die Größenordnung der partiellen Ableitungen enthalten, z.B. $I_x + C_x < 1$.

sind, die Null sind, die also Zeilen bzw. Spalten mit identischen Elementen aufweisen, wenn auch bloß das Vorzeichen dieser Elemente und nicht ihre numerische Größenordnung bekannt ist.
In solchen Fällen führt aber die einfache Regel, die wir auf S. 57 beschrieben haben, zum gewünschten Ergebnis. Wir wollen das an folgendem System $Az = 0$[1] veranschaulichen, wobei A folgendes Vorzeichenbild hat:

	1	2	3	4	5	6
1	-	0	0	0	-	0
2	+	0	+	0	0	0
3	0	0	a	a	0	-
4	+	-	0	0	0	0
5	0	0	b	b	0	0

sign a = (+); sign b = (-);

Die Anwendung des Lancasterschen Algorithmus führt nicht zu einer eindeutigen Lösung. Die Matrix kann nicht in eine Standardform gebracht werden und genügt auch nicht den Bedingungen des Theorems (2), S.1o4. Ersetzen wir jedoch die dritte Zeile durch die Summe aus dem (-a/b)-fachen der letzten Zeile (0 0 -a -a 0 -) und der dritten Zeile (0 0 0 0 0 -), so erhalten wir

	1	2	3	4	5	6
1	-	0	0	0	-	0
2	+	0	+	0	0	0
3	0	0	0	0	0	-
4	+	-	0	0	0	0
5	0	0	-	+	0	0

1) Entspricht Gl. (14), S.68.

Es liegt nun ein degeneriertes System vor, so daß wir die dritte Zeile und sechste Spalte streichen können, d.h. $c_6 = 0$. Das Restsystem kann in die Lancastersche Standardform gebracht werden:[1)]

	-4	-5	-3	2	1
5	-	0	+	0	0
-1	0	-	0	0	+
2	0	0	-	0	+
4	0	0	0	-	+

Der Lösungsvektor hat also folgendes Vorzeichenbild:

$$\text{sign } c = (+ + - - - 0).$$

Die mangelnde Vorzeichenlösbarkeit des Systems hat ihre Ursache darin, daß die Determinante der Untermatrix

$$\begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix}$$

Null ist. Die von uns nach der Regel S.57 gebildete Linearkombination stellt nichts anderes dar als eben das Ausrechnen dieser Unterdeterminante, wobei die Koeffizientenmatrix in eine solche Form gebracht wird, daß ihr Vorzeichenbild nicht weniger Information enthält als ihr 'Koeffizientenbild'.
Wir haben hier einen einfachen Fall dargestellt. In dem Bassetschen Beispiel ($d\alpha \neq 0$) war eben nicht nur eine sondern zwei Untermatrizen auszurechnen. Natürlich ist es im Extremfall möglich, daß so viele Unterdeterminanten auszurechnen sind, daß in der Tat der Rechenaufwand bei Anwendung der Cramerschen Regel nicht sehr viel höher ist. Im allgemeinen wird sich aber der Rechenaufwand durch Bildung von Linearkombinationen auf eine oder zwei Unterdeterminanten beschränken.

---

1) Oder auch mit Hilfe des Lancasterschen Algorithmus und des Theorems (2) gelöst werden.

LITERATURVERZEICHNIS

ACKLEY, G., "The Muliplier Time Period: Money, Inventories and Flexibility", American Economic Review, vol. 41, June 1951, S. 350 - 368

ANDO, A., FISHER, F.M., SIMON, H.A., Essays on the Structure of Social Science Models, Cambridge (Mass.) 1963

BASMANN, R.L., (1), "The Causal Interpretation of Non-Triangular Systems of Economic Relations", Econometrica, vol. 31, July 1963, S. 439 - 448

BASMANN, R.L., (2), "On the Causal Interpretation of Non-Triangular Systems of Economic Relations: A Rejoinder", Econometrica, vol. 31, July 1963, 451 - 453

BASSET, L., "The Solution of Qualitative Comparative Static Problems", Quarterly Journal of Economics, vol. 82, August 1968, S. 519 bis S. 523

BASSET, L., HABIBAGAHI, H., and QUIRK, J., "Qualitative Economics and Morishima Matrices", Econometrica, vol. 35, April 1967, S. 221 - 233

BASSET, L., MAYBEE, J., and QUIRK, J., "Qualitative Economics and the Scope of the Correspondence Principle", Econometrica, vol. 36, July-October 1968, S. 544 - 563

BENTZEL, R., and HANSEN, B., "On Recursiveness and Interdependency in Economic Models", Review of Economic Studies, vol. 22, 1954/55, S. 153 - 168

BÖVENTER, E. von, Besprechung von KUHN (1968), Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft, Bd. 125, 2. Heft, 1969, S. 312 - 314

BÖVENTER, E. von, "Bemerkungen zu Kuhns Replik" Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft, Bd. 126, 3. Heft, 1970, S. 526

BOSERUP, M., "A Note on the Prehistory of the Kahn Multiplier", Economic Journal, vol. 79, September 1969, S. 667 - 669

BROWN, M.T., Specification and Uses of Econometric Models, London 1970

FISHER, F.M., "On the Cost of Approximate Specification in Simultaneous Equation Estimation", Econometrica, vol. 29, April 1961, S. 139 - 170; abgedr. in ANDO/FISHER/SIMON (1963), Chap. 3, S. 32 - 63 (Seitenangaben von dort)

FISHER, F.M., "Dynamic Structure and Estimation in Economy-wide Econometric Models", in: J.S. Duesenberry, G. Fromm, L.R. Klein and E. Kuh, eds., The Brookings Quarterly Econometric Model of the United States, Chicago-Amsterdam 1965, chap. 15, S. 589 - 635

FROMM, G., and TAUBMANN, P., Policy Simulations with an Econometric Model, Washington, D.C., Amsterdam 1968

GOLDBERGER, A.S., Impact Multipliers and Dynamic Propertiers of the Klein-Goldberger Model, Amsterdam 1959

GORMAN, W.M., "More Scope for Qualitative Economics", Review of Economic Studies, vol. 31, January 1964, S. 65 - 68

GRÖBNER, W., Matrizenrechnung, Mannheim 1966

GRUBER, F., Ökonometrische Modelle des Cowles-Commission-Typs: Bau und Interpretation, Hamburg und Berlin 1968

HABIBAGAHI, H., Qualitative Analysis of Dynamic Stability in General Equilibrium Theory, Doctoral Thesis, Purdue University Microfilms, Ann Arbor, Michigan, 1968

HANSEN, B., The Economic Theory of Fiscal Policy, London 1958

HEGELAND, H., The Multiplier Theory, Lund 1954

HICKS, J., Capital and Growth, Oxford 1965

KAHN, R.F., "The Relation of Home Investment to Unemployment", Economic Journal, vol. 41, June 1931, S. 173 - 198

KEYNES, J.M., The General Theory of Employment, Interest and Money, London 1936

KOOPMANS, T.C. and HOOD, W.C., (1), "The Estimation of Simultaneous Linear Economic Relationships", in: KOOPMANS/HOOD (2) (1953), S. 112 - 199

KOOPMANS, T.C. and HOOD, W.C., (2), eds., Studies in Econometric Method, Cowles Commission For Research in Economics, Monograph No. 14, New York, London 1953

KUHN, H., Die Struktur quantitativer Modelle. Zur wirtschaftstheoretischen Grundlegung der Ökonometrie. Tübinger Wirtschaftswissenschaftliche Abhandlungen, hrsgg. von der Wirtschaftswissenschaftlichen Abteilung der Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der Universität Tübingen, Band 4, Tübingen 1968

KUHN, H., "Zur kausalen Interpretation der Gleichgewichtsbedingungen im ökonomischen Modell", Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft, Bd. 126, 3. Heft, 1970, S. 524 - 527

LANCASTER, K., "The Scope of Qualitative Economics", Review of Economic Studies, vol. 29, April 1962, S. 99 - 123

LANCASTER, K., "Partitionable Systems and Qualitative Economics", Review of Economic Studies vol. 31, January 1964, S. 69 - 72

LANCASTER, K., "The Theory of Qualitative Linear Systems", Econometrica, vol. 33, April 1965, S. 395 - 408

LANCASTER, K., "The Solution of Qualitative Comparative Static Problems", Quarterly Journal of Economics, vol. 80, May 1966, S. 278 - 295

LLOYD, P.J., "Qualitative Calculus and Comparative Static Analysis", Economic Record, vol. 45, September 1969, S. 343 - 353

MACHLUP, F., "Period Analysis and Multiplier Theory", Quarterly Journal of Economics, vol. 54, November 1939, S. 1 - 27; abgedr. in: Readings in Business Cycle Theory, 2. engl. Aufl., London 1954, S. 203 bis S. 234

MACHLUP, F., "Statics and Dynamics: Kaleidoscopic Words", Southern Economic Journal, vol. 26, October 1959, S. 91 - 110; abgedr. in F. Machlup, Essays on Economic Semantics, Englewood Cliffs, N.J., 1963, S. 9 - 42 (Seitenangaben von dort)

MENGES, G., Ökonometrie, Wiesbaden 1961

METZLER, L.A., "Three Lags in the Circular Flow of Income", in: Income, Employment and Public Policy. Essays in Honor of A.H. Hansen, New York 1948, S. 11 - 32

NERLOVE, M., "A Tabular Survey of Macro-Econometric Models", International Economic Review, vol. 7, May 1966, S. 127 - 175

PAPANDREOU, A.G., Introduction to Macroeconomic Models. An Analytical Approach, Athens 1965

QUIRK, J.P., (1), "Comparative Statics and Walras' Law: The Case of Strong Dependence", Review of Economic Studies, vol. 35, January 1968, S. 11 - 21

QUIRK, J.P., (2), "The Correspondence Principle: A Macroeconomic Application", International Economic Review, vol. 9, October 1968, S. 294 - 306

QUIRK, J.P., "The Competitive Equilibrium: A Qualitative Analysis", in: K.A. Fox, J.K. Sengupta, G.V.L. Narasimham, eds., Economic Models, Estimation and Risk Programming: Essays in Honor of Gerhard Tintner, Berlin-Heidelberg-New-York 1969, S. 58 - 85

QUIRK, J.P., and RUPPERT, R., "Qualitative Economics and the Stability of Equilibrium", Review of Economic Studies, vol. 32, 1965, S. 311 - 326

QUIRK, J.P., and SAPOSNIK, R., Introduction to General Equilibrium Theory and Welfare Economics, New York u.a., 1968

RICHTER, R., "Methodologie aus der Sicht des Wirtschaftstheoretikers", Weltwirtschaftliches Archiv, Bd. 95, 1965 II, S. 242 - 261

RICHTER, R., Skriptum zur Vorlesung Theorie der Beschäftigung, des Zinses und des Geldes, Institut für theoretische Volkswirtschaftslehre der Universität des Saarlandes, unveröffentlichtes Manuskript, Sommersemester 1970

SAMUELSON, P.A., Foundations of Economic Analysis, Cambridge (Mass.) 1947, 3rd print. 1963

SCHILCHER, R., "Multiplikator und Akzelerator", in: Handwörterbuch der Sozialwissenschaften, 7. Bd., Stuttgart - Tübingen - Göttingen 1961, S. 469 - 478

SCHNACK, H.W., "Die Depressionstheorie bei N.A.L.J. Johannsen und J.M. Keynes", Jahrbuch für Sozialwissenschaft, Bd. 2, Göttingen 1951, S. 132 - 156

SCHNEIDER, E., "Statik und Dynamik", in: Handwörterbuch der Sozialwissenschaften, 10. Bd., Stuttgart-Tübingen-Göttingen 1959, S. 23 - 29

SHACKLE, G.L.S., "Twenty Years On: A Survey of the Theory of the Multipier", Economic Journal, vol. 61, June 1951, S. 241 bis S. 260

SIMON, H.A., "Causal Ordering and Identifiability" in: KOOPMANS/HOOD (2) (1953), S. 49 - 74; abgedr. in ANDO/FISHER/SIMON (1963), S. 5 - 31 und in H.A. Simon, Models of Man, 3rd print., New York 1957, S. 10 bis S. 36 (Seitenangaben von dort)

STROTZ, R.H., "Interdependence as a Specification Error", Econometrica, vol. 28, April 1960, S. 428 - 442

STROTZ, R.H., and WOLD, H.O.A., "Recursive vs. Nonrecursive Systems: An Attempt at Synthesis", Econometrica, vol. 28, April 1960, S. 417 - 427

STROTZ, R.H., and WOLD, H.O.A., "The Causal Interpretability of Structural Parameters: A Reply", Econometrica, vo. 31, July 1963, S. 449 - 450

THEIL, H., and BOOT, J.C.G., "The Final Form of Econometric Equation Systems", Review of the International Statistical Institute, vol. 30:2, 1962, S. 136 - 152

WALLIS, K.F., "Some Recent Developments in Applied Econometrics: Dynamic Models and Simultaneous Equation Systems", Journal of Economic Literature, vol. 7, September 1969, S. 771 - 796

WALTERS, A.A., An Introduction to Econometrics, London 1968

WOLD, H.O.A., "A Generalization of Causal Chain Models", Econometrica, vol. 28, April 1960, S. 443 - 463

WOLD, H.O.A., in association with JURÉEN, L., Demand Analysis. A Study in Econometrics, New York-Stockholm 1953

difo-druck schmacht · bamberg